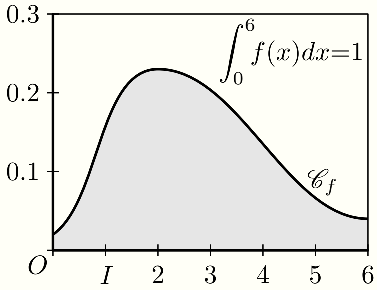
La loi continue

A. Définition:

Définition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle **densité de probabilité sur** I toute fonction f définie sur I vérifiant les trois conditions suivantes :

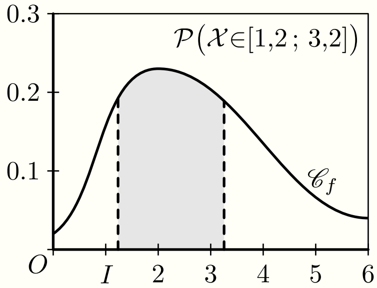
- f continue sur I ;
- f est positive sur I *(pour tout réel de* I*,* $f(x)\geqslant 0$*)* ;
- l'aire siutée sous sa courbe $\mathscr{C}$ est égale à une unité d'aire : $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1$



Définition :

On dit qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ à valeurs dans I **suit une la loi de probabilité** $\mathcal{P}$ **de densité** f **sur** I lorsque pour tout entier a et b appartenant à I *(*$a<b$*)* :

$$\mathcal{P}\big(\alpha\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Définition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ et ayant pour densité de probabilité la fonction f.

On définit l'**espérance de la variable aléatoire** $\mathcal{X}$ comme étant le nombre, noté $E\big(\mathcal{X}\big)$ défini par :

$$\int_a^b x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

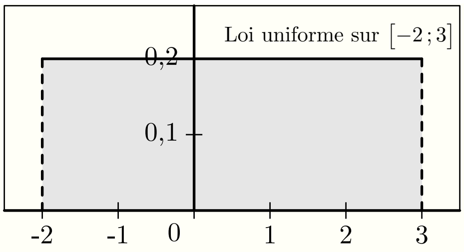
B. Loi uniforme:

Définition :

Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$:

On dit qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une **loi uniforme sur l'intervalle** $I=[a\,;b]$ si la variable $\mathcal{X}$ est continue sur I et admet pour densité la fonction constante f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$



Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $I=[a\,;b]$. Pour α et β deux réels de de l'intervalle I tels que $\alpha<\beta$, on a :

$$\mathcal{P}\big(\alpha\leqslant\mathcal{X}\leqslant\beta\big) = \mathcal{P}\big(\mathcal{X}\in[\alpha\,;\,\beta]\big) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x$$

Exemple :

Dans une population d'étude, on suppose que le poids des individus est équitablement réparti entre $55\,kg$ et $95\,kg$. Déterminons la probabilité de choisir un individu dont le poid est entre $60\,kg$ et $70\,kg$.

On modélise le poid de chaque individu par une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[60\,;95]$.

La probabilité recherchée a pour valeur :

$$\mathcal{P}\big(60\leqslant\mathcal{X}\leqslant 70\big) = \int_{60}^{70} \frac{1}{95-55}\,\mathrm{d}x = \int_{60}^{70}\frac{1}{40}\,\mathrm{d}x = 0{,}25$$

Proposition :

Considérons la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi continue sur l'intervalle $[a\,;b]$. L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :

$$E\big(\mathcal{X}\big) = \frac{a+b}{2}$$

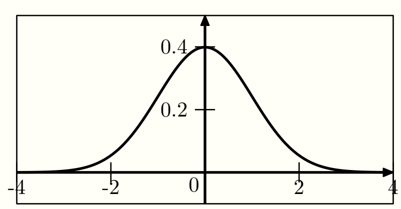
C. Loi normale:

1. Centrée et réduite :

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une **loi normale de moyenne** 0 **et d'écart-type** 1, si la variable aléatoire $\mathcal{X}$ admet pour densité la fonction f :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}. \qquad \text{On note } \mathcal{X}\sim\mathcal{N}(0\,;1)$$



On dit aussi que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit aussi une loi normale centrée réduite.

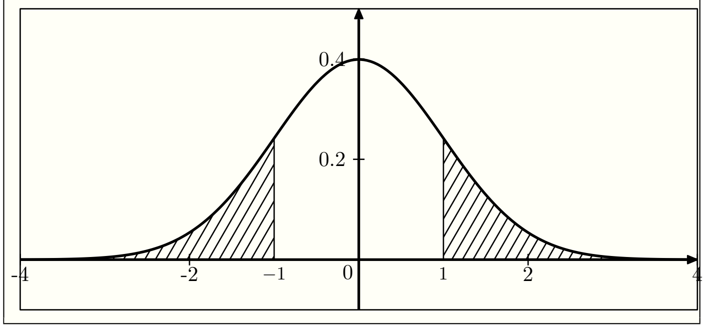
Remarque :

- On admet que : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\int_{-x}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt = 1.$

  Ainsi, la fonction f vérifie les trois conditions pour être une loi de probabilité.

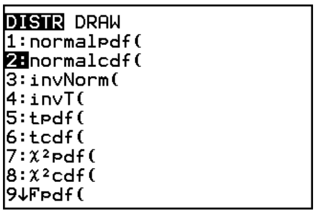
- La courbe de la densité de la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1 admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

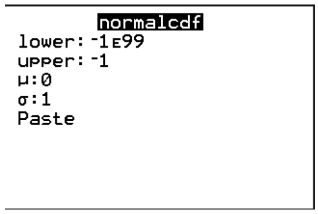
  On remarque qu'alors : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant-1)=\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant1)$

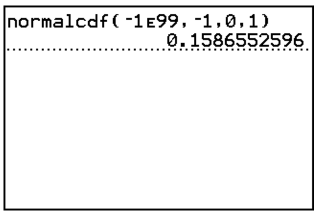


2. Usage de la calculatrice :

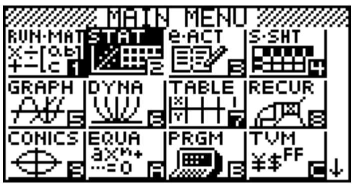
- Pour les Texas instruments :

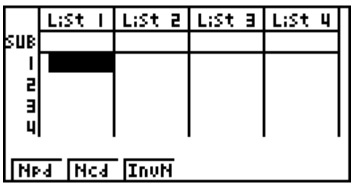


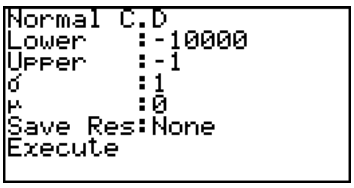


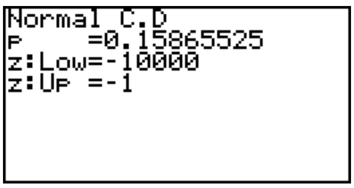


- Pour les calculatrices Casio :









3. Loi normale :

Définition :

Soit $\mu\in\mathbb{R}$ et $\sigma>0$. On dit qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ si $\dfrac{\mathcal{X}-\mu}{\sigma}$ est une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ. On a :

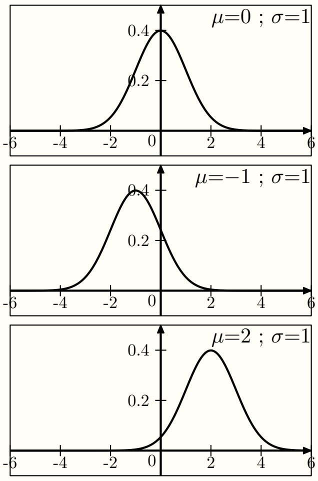
$$E(\mathcal{X})=\mu \quad ; \quad V(\mathcal{X})=\sigma^2$$

Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a un écart-type égal à σ.

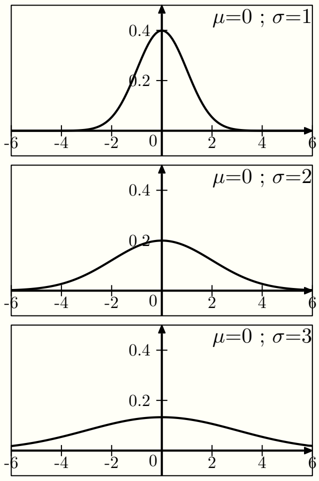
Remarque :

Voici une interprétation des deux paramètres d'une loi normale :

Le paramètre μ est un paramètre de position :



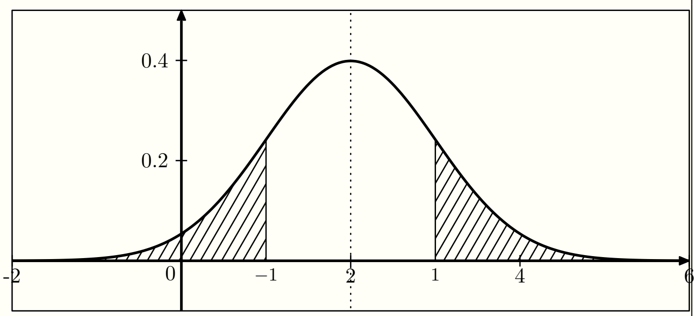
Le paramètre σ^2 est un paramètre de dispersion :



Remarque :

La courbe de la densité de la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ admet un axe de symétrie d'axe $x=\mu$.

Ci-dessous, est représentée la courbe de la densité de la loi normale de moyenne 2 et d'écart-type 1 :



La courbe de sa fonction densité admet pour axe de symétrie la droite $x=2$.
On en déduit une relation sur les aires donnant l'égalité :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant1)=\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant3)$

4. Intervalle de normalité :

Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 ($\mathcal{X}\sim\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$).

On a les valeurs suivantes :

- $\mathcal{P}(\mu-\sigma\leqslant\mathcal{X}\leqslant\mu+\sigma)\simeq0{,}68$
- $\mathcal{P}(\mu-2\cdot\sigma\leqslant\mathcal{X}\leqslant\mu+2\cdot\sigma)\simeq0{,}95$
- $\mathcal{P}(\mu-3\cdot\sigma\leqslant\mathcal{X}\leqslant\mu+3\cdot\sigma)\simeq0{,}997$

D. Intervalle de fluctuation :

Définition :

Considérons n un entier strictement positif et p un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p ($\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(n\,;p)$). On note $\mathcal{F}$ la variable associant la fréquence de succès associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{F}=\frac{\mathcal{X}}{n}$$

On a appelle **intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de** 95 % de la variable aléatoire F l'intervalle :

$$I=\left[p-1{,}96\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+1{,}96\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Remarque :

- Cette définition est une conséquence du théorème de Moivre-Laplace. Pour qu'il soit utilisé, il faut que les conditions de l'exercices vérifient :
  $n\geqslant 30 \quad ; \quad n\cdot p\geqslant 5 \quad ; \quad n\cdot(1-p)\geqslant 5$
- La construction de cet intervalle permet d'affirmer que la probabilité qu'une issue de l'expérience aléatoire appartient à cet intervalle est d'**au moins** 0,95.
  Lors d'arrondie, pour conserver cette propriété, on applique la règle suivante : on prend la valeur par défaut de la borne inférieure et la valeur par excès de la borne supérieure. Voir exemple suivant.
- Cet intervalle généralise l'intervalle de fluctuation rencontré en classe de seconde :
  $I'=\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

Exemple :

Les conditions d'utilisation du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées :

$n=1000\geqslant 30 \quad ; \quad n\cdot p=150\geqslant 5 \quad ; \quad n\cdot(1-p)=850\geqslant 5$

Ainsi, l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence au seuil de 95 % s'écrit :

$$I=\left[p-1{,}96\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p-1{,}96\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$I=\left[0{,}15-1{,}96\cdot\frac{\sqrt{0{,}15\times 0{,}85}}{\sqrt{1000}}\,;\,0{,}15-1{,}96\cdot\frac{\sqrt{0{,}15\times 0{,}85}}{\sqrt{1000}}\right]$$

$$I\approx\left[0{,}127868\,;\,0{,}17213\right]$$

On utilise la valeur par défaut de la borne inférieure
et la valeur par excès de la borne supèrieure :

$$I\approx\left[0{,}127\,;\,0{,}173\right]$$

E. Intervalle de confiance :

Définition :

On considère un échantillon dont la proportion d'individu réalisant l'évènement A est de valeur p inconnues.
Un tirage successif et avec remise d'un échantillon de taille n fait apparaitre une fréquence de l'évènement A valant f.

On appelle **intervalle de confiance de la proportion** p **avec un niveau de confiance** 0,95 l'intervalle :

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Remarque :

On admet que pour valider ces résultats, les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$n\geqslant 30 \quad ; \quad n\cdot f\geqslant 5 \quad ; \quad n\cdot(1-f)\geqslant 5$

