Théorème : *(Théorème des gendarmes)*

Soit ℓ un nombre réel et f, u, v trois fonctions définies sur $\left[a\,;+\infty\right[$ tels que :

- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} v(x) = \ell$
- Pour tout $x\in\left[a\,;+\infty\right[$:
  $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$

Alors on a : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \ell$

Preuve :

Prenons un intervalle ouvert I contenant ℓ, montrons que pour x assez grand, les valeurs de $f(x)$ sont entièrement contenues dans I.

- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x) = \ell$: il existe α tel que :
  $x\geqslant\alpha \implies u(x)\in I$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} v(x) = \ell$: il existe α' tel que :
  $x\geqslant\alpha \implies v(x)\in I$

Notons $A=max\left(\alpha\,;\alpha'\right)$ et pour $x\geqslant A$:

$$\left.\begin{array}{l} u(x)\in I \text{ et } v(x)\in I \\ I \text{ est un intervalle}\end{array}\right\} \implies \left[u(x)\,;v(x)\right]\subset I$$

Ainsi, $f(x)\in I$

Théorème : *(Théorème des gendarmes)*

Soit ℓ un nombre réel et f, u, v trois fonctions définies sur $\left[a\,;b\right[$ tels que :

- $\lim\limits_{x\mapsto b^-} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto b^-} v(x) = \ell$
- Pour tout $x\in\left[a\,;b\right[$: $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$

Alors : $\lim\limits_{x\mapsto b^-} f(x) = \ell$

Théorème : *(Cas des limites infinies)*

Soit f et u deux fonctions ; a représente soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$. Supposons que :

- Pour tout réel x voisin de a : $f(x)\geqslant u(x)$
- $\lim\limits_{x\mapsto a} u(x) = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) = +\infty$

Théorème : *(Théorème des gendarmes)*

Soit ℓ un nombre réel et f, u, v trois fonctions définies sur $\left[a\,;+\infty\right[$ tels que :

- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} v(x) = \ell$
- Pour tout $x\in\left[a\,;+\infty\right[$:
  $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$

Alors on a : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \ell$

Preuve :

Prenons un intervalle ouvert I contenant ℓ, montrons que pour x assez grand, les valeurs de $f(x)$ sont entièrement contenues dans I.

- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x) = \ell$: il existe α tel que :
  $x\geqslant\alpha \implies u(x)\in I$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} v(x) = \ell$: il existe α' tel que :
  $x\geqslant\alpha \implies v(x)\in I$

Notons $A=max\left(\alpha\,;\alpha'\right)$ et pour $x\geqslant A$:

$$\left.\begin{array}{l} u(x)\in I \text{ et } v(x)\in I \\ I \text{ est un intervalle}\end{array}\right\} \implies \left[u(x)\,;v(x)\right]\subset I$$

Ainsi, $f(x)\in I$

Théorème : *(Théorème des gendarmes)*

Soit ℓ un nombre réel et f, u, v trois fonctions définies sur $\left[a\,;b\right[$ tels que :

- $\lim\limits_{x\mapsto b^-} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto b^-} v(x) = \ell$
- Pour tout $x\in\left[a\,;b\right[$: $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$

Alors : $\lim\limits_{x\mapsto b^-} f(x) = \ell$

Théorème : *(Cas des limites infinies)*

Soit f et u deux fonctions ; a représente soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$. Supposons que :

- Pour tout réel x voisin de a : $f(x)\geqslant u(x)$
- $\lim\limits_{x\mapsto a} u(x) = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) = +\infty$