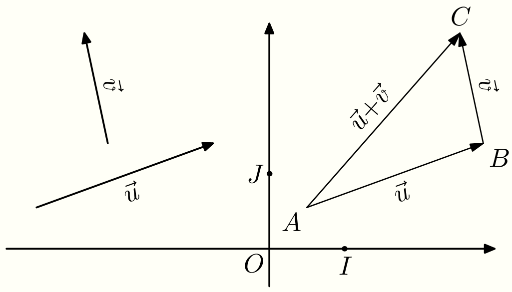
Proposition :

Dans un repère orthornormé, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non-nuls.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux
si, et seulement si, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

Preuve :

Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$:



On note les coordonnées de ces deux vecteurs :
$\overrightarrow{u}\,(x\,;y) \quad ; \quad \overrightarrow{v}\,(x'\,;y')$

Considérons trois points dans le plan A, B et C tels que :
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{v}$

Ainsi, le fait d'étudier si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux se traduit par le fait que le triangle ABC est rectangle en B ou non.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ vérifie la relation vectorielle :
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$
et a pour coordonnées : $\overrightarrow{AC}(x{+}x'\,;y{+}y')$

On a les longueurs suivantes :

- $AB=\big\|\overrightarrow{u}\big\|=\sqrt{x^2+y^2}$
- $BC=\big\|\overrightarrow{v}\big\|=\sqrt{x'^2+y'^2}$
- $AC=\big\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big\|=\sqrt{\big(x+x'\big)^2+\big(y+y'\big)^2}$

Considérons les équivalences suivantes :

ABC est rectangle

$\Longleftrightarrow \quad AC^2=AB^2+BC^2$

$\Longleftrightarrow \quad \big(x+x'\big)^2+\big(y+y'\big)^2=\big(x^2{+}y^2\big)+\big(x'^2{+}y'^2\big)$

$\Longleftrightarrow \quad x^2{+}2{\times}x{\times}x'{+}x'^2{+}y^2{+}2{\times}y{\times}y'{+}y'^2{=}x^2{+}y^2{+}x'^2{+}y'^2$

$\Longleftrightarrow \quad 2{\times}x{\times}x'+2{\times}y{\times}y'=0$

$\Longleftrightarrow \quad 2{\times}\big(x{\times}x'+y{\times}y'\big)=0$

$\Longleftrightarrow \quad x{\times}x'+y{\times}y'=0$

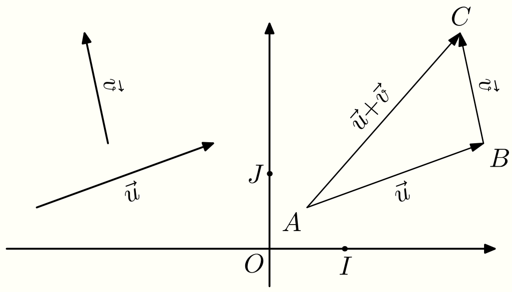
$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

Proposition :

Dans un repère orthornormé, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non-nuls.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux
si, et seulement si, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

Preuve :

Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$:



On note les coordonnées de ces deux vecteurs :
$\overrightarrow{u}\,(x\,;y) \quad ; \quad \overrightarrow{v}\,(x'\,;y')$

Considérons trois points dans le plan A, B et C tels que :
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{v}$

Ainsi, le fait d'étudier si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux se traduit par le fait que le triangle ABC est rectangle en B ou non.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ vérifie la relation vectorielle :
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$
et a pour coordonnées : $\overrightarrow{AC}(x{+}x'\,;y{+}y')$

On a les longueurs suivantes :

- $AB=\big\|\overrightarrow{u}\big\|=\sqrt{x^2+y^2}$
- $BC=\big\|\overrightarrow{v}\big\|=\sqrt{x'^2+y'^2}$
- $AC=\big\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big\|=\sqrt{\big(x+x'\big)^2+\big(y+y'\big)^2}$

Considérons les équivalences suivantes :

ABC est rectangle

$\Longleftrightarrow \quad AC^2=AB^2+BC^2$

$\Longleftrightarrow \quad \big(x+x'\big)^2+\big(y+y'\big)^2=\big(x^2{+}y^2\big)+\big(x'^2{+}y'^2\big)$

$\Longleftrightarrow \quad x^2{+}2{\times}x{\times}x'{+}x'^2{+}y^2{+}2{\times}y{\times}y'{+}y'^2{=}x^2{+}y^2{+}x'^2{+}y'^2$

$\Longleftrightarrow \quad 2{\times}x{\times}x'+2{\times}y{\times}y'=0$

$\Longleftrightarrow \quad 2{\times}\big(x{\times}x'+y{\times}y'\big)=0$

$\Longleftrightarrow \quad x{\times}x'+y{\times}y'=0$

$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$