Proposition :

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal.

Soit $A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$, $C(x_C\,;y_C)$ trois points du plan.

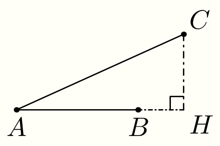
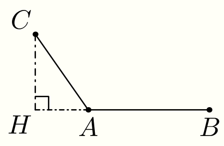
Les nombres suivants ont tous la même valeur :

a. $(x_B-x_A)(x_C-x_A)+(y_B-y_A)(y_C-y_A)$

b. $AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$

c. $\dfrac{1}{2}\cdot\left[\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2\right]$

d. En notant H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), on considère le nombre α défini suivant les deux cas :

$H\in[AB]$	$H\notin[AB]$
	
$\alpha=AB\times AH$	$\alpha=-AB\times AH$

Preuve :

1. a. $\Longleftrightarrow$ c.

- $\dfrac{1}{2}\cdot\left[\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2\right]$

$$=\frac{1}{2}\cdot\Big[(x_B+x_C-2\cdot x_A)^2+(y_B+y_C-2\cdot y_A)^2$$
$$-(x_B-x_A)^2-(y_B-y_A)^2$$
$$-(x_C-x_A)^2-(y_C-y_A)^2\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\Big[x_B^2+x_B\cdot x_C-2\cdot x_B\cdot x_A+x_B\cdot x_C+x_C^2-2\cdot x_C\cdot x_A$$
$$-2\cdot x_B\cdot x_A-2\cdot x_C\cdot x_A+4\cdot x_A^2$$
$$+y_B^2+y_B\cdot y_C-2\cdot y_B\cdot y_A+y_B\cdot y_C+y_C^2-2\cdot y_C\cdot y_A$$
$$-2\cdot y_B\cdot y_A-2\cdot y_C\cdot y_A+4\cdot y_A^2$$
$$-x_B^2+4\cdot x_B\cdot x_A-x_A^2-y_B^2+4\cdot y_B\cdot y_A-y_A^2$$
$$-x_C^2+4\cdot x_C\cdot x_A-x_A^2-y_C^2+4\cdot y_C\cdot y_A-y_A^2\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\Big[2\cdot x_B\cdot x_C-2\cdot x_B\cdot x_A-2\cdot x_C\cdot x_A+2\cdot x_A^2$$
$$+2\cdot y_B\cdot y_C-2\cdot y_B\cdot y_A-2\cdot y_C\cdot y_A+2\cdot y_A^2\Big]$$

$$=x_B\cdot x_C\text{-}x_B\cdot x_A\text{-}x_A\cdot x_C+x_A^2+y_B\cdot y_C\text{-}y_B\cdot y_A\text{-}y_A\cdot y_C+y_A^2$$

- $(x_B-x_A)(x_C-x_A)+(y_B-y_A)(y_C-y_A)$

$$=x_B\cdot x_C\text{-}x_B\cdot x_A\text{-}x_A\cdot x_C+x_A^2+y_B\cdot y_C\text{-}y_B\cdot y_A\text{-}y_A\cdot y_C+y_A^2$$

2. b. $\Longleftrightarrow$ d.

Par disjonction de cas :

- Si $\left|\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)\right|<90$:
  Le triangle AHC est un triangle rectangle et on la relation trigonométrique :

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{AH}{AC}$$
$$AC\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=AH$$

  Ainsi, on a l'égalité :

$$AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}=AB\times AH$$

- Si $\left|\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)\right|>90$:
  Le triangle AHC est rectangle et on la mesure :
  $\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AH}\right)=\pi-\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$
  On a la relation trigonométrique :

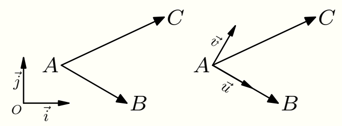
$$\cos\widehat{CAH}=\frac{AH}{AC}$$
$$\cos\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AH}\right)=\frac{AH}{AC}$$
$$\cos\left[\pi-\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)\right]=\frac{AH}{AC}$$
$$-\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{AH}{AC}$$
$$AC\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=-AH$$

  On en déduit l'égalité :

$$AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=AB\times(-AH)$$
$$=-AB\times AH$$

3. a. $\Longleftrightarrow$ b.

La formule c. permet d'affirmer que la formule a. est indépendante du repère choisi à partir du moment où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ conservent la même norme.



Considérons les deux vecteurs :

- $\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$
- $\vec{v}$ de même norme que le vecteur $\vec{u}$ et tel que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

et choisissons le repère $\left(A\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

On a alors les coordonnées suivantes des points dans ce repère :

$A(0\,;0)$; $B(AB\,;0)$

$C\Big(AC\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right);AC\cdot\sin\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)\Big)$

Ainsi, dans ce repère, on a :

$$(x_B-x_A)(x_C-x_A)+(y_B-y_A)(y_C-y_A)$$
$$=AB\times\Big[AC\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)\Big]+0\times\Big[AC\cdot\sin\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)\Big]$$
$$=AB\cdot AC\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right))$$