Proposition :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Alors pour tout point M, on a la relation sur les longueurs :

$$MA^2 + MB^2 = 2{\cdot}MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Preuve :

Soit A et B deux points disctincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.
Considérons un point M quelconque du plan.

Les propriétés du produit scalaire permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= \big(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\big)^2 + \big(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\big)^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= MI^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\big(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\big) + IA^2 + MI^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés :

$$\begin{aligned} &= MI^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\,\overrightarrow{0} + IA^2 + MI^2 + IB^2 \\ &= 2{\cdot}MI^2 + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Les segments $[IA]$ et $[IB]$ sont de même longueur :

$$\begin{aligned} &= 2{\cdot}MI^2 + 2{\cdot}IA^2 = 2{\cdot}MI^2 + 2{\cdot}\Big(\frac{AB}{2}\Big) \\ &= 2{\cdot}MI^2 + 2{\times}\frac{AB^2}{4} = 2{\cdot}MI^2 + \frac{AB^2}{4} \end{aligned}$$

Proposition :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Alors pour tout point M, on a la relation sur les longueurs :

$$MA^2 + MB^2 = 2{\cdot}MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Preuve :

Soit A et B deux points disctincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.
Considérons un point M quelconque du plan.

Les propriétés du produit scalaire permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= \big(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\big)^2 + \big(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\big)^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= MI^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\big(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\big) + IA^2 + MI^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés :

$$\begin{aligned} &= MI^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\,\overrightarrow{0} + IA^2 + MI^2 + IB^2 \\ &= 2{\cdot}MI^2 + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Les segments $[IA]$ et $[IB]$ sont de même longueur :

$$\begin{aligned} &= 2{\cdot}MI^2 + 2{\cdot}IA^2 = 2{\cdot}MI^2 + 2{\cdot}\Big(\frac{AB}{2}\Big) \\ &= 2{\cdot}MI^2 + 2{\times}\frac{AB^2}{4} = 2{\cdot}MI^2 + \frac{AB^2}{4} \end{aligned}$$

Proposition :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Alors pour tout point M, on a la relation sur les longueurs :

$$MA^2 + MB^2 = 2{\cdot}MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Preuve :

Soit A et B deux points disctincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.
Considérons un point M quelconque du plan.

Les propriétés du produit scalaire permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= \big(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\big)^2 + \big(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\big)^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= MI^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\big(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\big) + IA^2 + MI^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés :

$$\begin{aligned} &= MI^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\,\overrightarrow{0} + IA^2 + MI^2 + IB^2 \\ &= 2{\cdot}MI^2 + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Les segments $[IA]$ et $[IB]$ sont de même longueur :

$$\begin{aligned} &= 2{\cdot}MI^2 + 2{\cdot}IA^2 = 2{\cdot}MI^2 + 2{\cdot}\Big(\frac{AB}{2}\Big) \\ &= 2{\cdot}MI^2 + 2{\times}\frac{AB^2}{4} = 2{\cdot}MI^2 + \frac{AB^2}{4} \end{aligned}$$

Proposition :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Alors pour tout point M, on a la relation sur les longueurs :

$$MA^2 + MB^2 = 2{\cdot}MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Preuve :

Soit A et B deux points disctincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.
Considérons un point M quelconque du plan.

Les propriétés du produit scalaire permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= \big(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\big)^2 + \big(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\big)^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= MI^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\big(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\big) + IA^2 + MI^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés :

$$\begin{aligned} &= MI^2 + 2{\times}\overrightarrow{MI}{\cdot}\,\overrightarrow{0} + IA^2 + MI^2 + IB^2 \\ &= 2{\cdot}MI^2 + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Les segments $[IA]$ et $[IB]$ sont de même longueur :

$$\begin{aligned} &= 2{\cdot}MI^2 + 2{\cdot}IA^2 = 2{\cdot}MI^2 + 2{\cdot}\Big(\frac{AB}{2}\Big) \\ &= 2{\cdot}MI^2 + 2{\times}\frac{AB^2}{4} = 2{\cdot}MI^2 + \frac{AB^2}{4} \end{aligned}$$

