Proposition :

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non-nuls et colinéaires :

- Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens :
  $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|$
- Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposés :
  $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|$

Preuve :

Notons $\overrightarrow{u}(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;y')$ les coordonnées de ces deux vecteurs dans le repère et α le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{v}$ par $\overrightarrow{u}$.

On a la relation : $\overrightarrow{v} = \alpha\cdot\overrightarrow{u}$

On en déduit que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$ s'expriment par : $\overrightarrow{v}(\alpha{\cdot}x\,;\alpha{\cdot}y)$

Ainsi, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ s'expriment par :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = x{\cdot}x' + y{\cdot}y' = x\cdot(\alpha{\cdot}x) + y\cdot(\alpha{\cdot}y) = \alpha\cdot(x^2+y^2)$$

Le nombre x^2+y^2 étant positif :

$$= \alpha\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(\alpha\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)$$
$$= \|\overrightarrow{u}\|\cdot\left(\alpha\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

- Si $\alpha>0$ alors : $\alpha = \sqrt{\alpha^2}$
  On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\left(\alpha\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right) = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\left[\sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right]$$
$$= \|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{\alpha^2\cdot(x^2+y^2)} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{\alpha^2{\cdot}x^2+\alpha^2{\cdot}y^2}$$
$$= \|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{(\alpha{\cdot}x)^2+(\alpha{\cdot}y)^2} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}$$
$$= \|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|$$

- Si $\alpha>0$ alors : $\alpha=-\sqrt{(-\alpha)^2}$
  On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\left(\alpha\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right) = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\left[-\sqrt{(-\alpha)^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right]$$
$$= -\|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{(-\alpha)^2\cdot(x^2+y^2)}$$
$$= -\|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{(-\alpha)^2{\cdot}x^2+(-\alpha)^2{\cdot}y^2}$$
$$= -\|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{(-\alpha{\cdot}x)^2+(-\alpha{\cdot}y)^2} = -\|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}$$
$$= -\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|$$

Proposition :

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non-nuls et colinéaires :

- Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens :
  $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|$
- Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposés :
  $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|$

Preuve :

Notons $\overrightarrow{u}(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;y')$ les coordonnées de ces deux vecteurs dans le repère et α le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{v}$ par $\overrightarrow{u}$.

On a la relation : $\overrightarrow{v} = \alpha\cdot\overrightarrow{u}$

On en déduit que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$ s'expriment par : $\overrightarrow{v}(\alpha{\cdot}x\,;\alpha{\cdot}y)$

Ainsi, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ s'expriment par :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = x{\cdot}x' + y{\cdot}y' = x\cdot(\alpha{\cdot}x) + y\cdot(\alpha{\cdot}y) = \alpha\cdot(x^2+y^2)$$

Le nombre x^2+y^2 étant positif :

$$= \alpha\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(\alpha\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)$$
$$= \|\overrightarrow{u}\|\cdot\left(\alpha\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

- Si $\alpha>0$ alors : $\alpha = \sqrt{\alpha^2}$
  On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\left(\alpha\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right) = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\left[\sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right]$$
$$= \|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{\alpha^2\cdot(x^2+y^2)} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{\alpha^2{\cdot}x^2+\alpha^2{\cdot}y^2}$$
$$= \|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{(\alpha{\cdot}x)^2+(\alpha{\cdot}y)^2} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}$$
$$= \|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|$$

- Si $\alpha>0$ alors : $\alpha=-\sqrt{(-\alpha)^2}$
  On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\left(\alpha\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right) = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\left[-\sqrt{(-\alpha)^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right]$$
$$= -\|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{(-\alpha)^2\cdot(x^2+y^2)}$$
$$= -\|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{(-\alpha)^2{\cdot}x^2+(-\alpha)^2{\cdot}y^2}$$
$$= -\|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{(-\alpha{\cdot}x)^2+(-\alpha{\cdot}y)^2} = -\|\overrightarrow{u}\|\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}$$
$$= -\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|$$