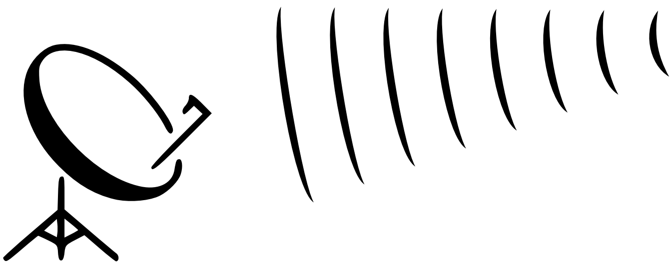
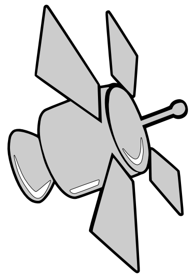
La parabole





Etudions une propriété de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction carré notée f.

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère $(O\,;I\,;J)$:

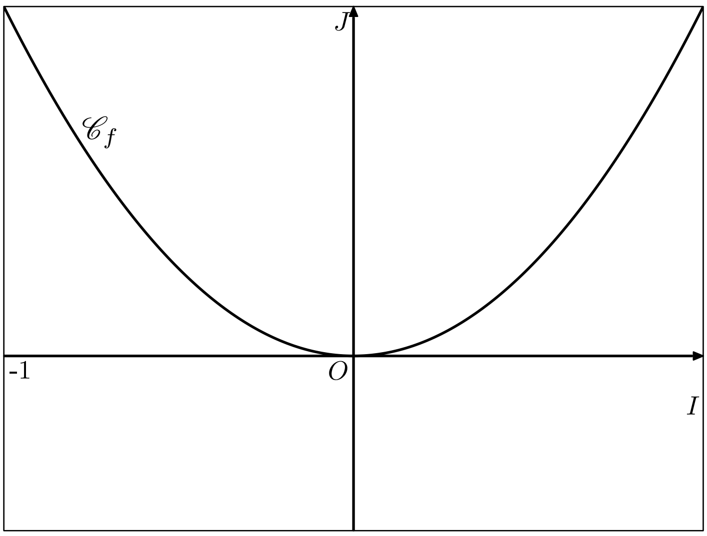


Fig. 1

Des propriétés géométriques caractérisent cette courbe. Pour les étudier, on associe à $\mathscr{C}_f$ deux objets géométriques :

Son foyer $F\left(0\,;\dfrac{1}{4}\right)$; Sa directrice (Δ) : $y=-\dfrac{1}{4}$

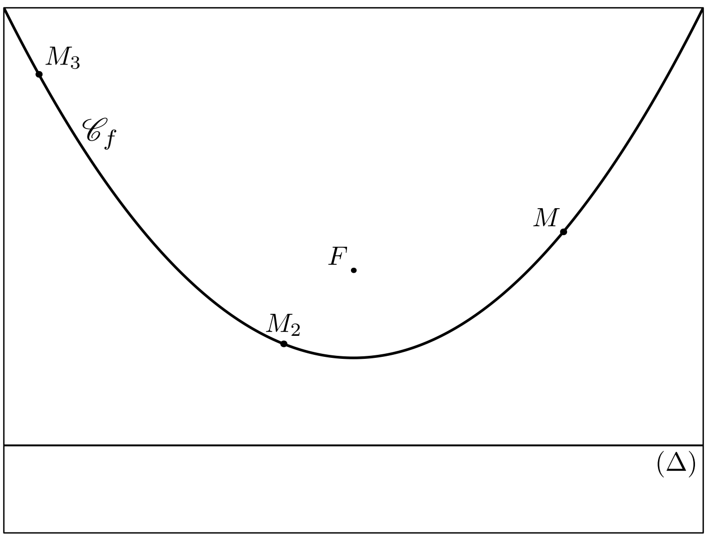


Fig. 2

1. Etude du point M dans la Fig. 2 :

a. Placer le point N intersection de la droite (Δ) et de la droite passant par le point M et perpendiculaire à la droite (Δ).

b. Comparer les distances MN et MF.

2. On note N_2 *(resp.* N_3*)* le projeté orthogonal du point M_2 *(resp.* M_3*)* sur la droite (Δ).
Comparer les couples de longueurs :

a. M_2F et N_2M_2 b. M_3F et M_3N_3

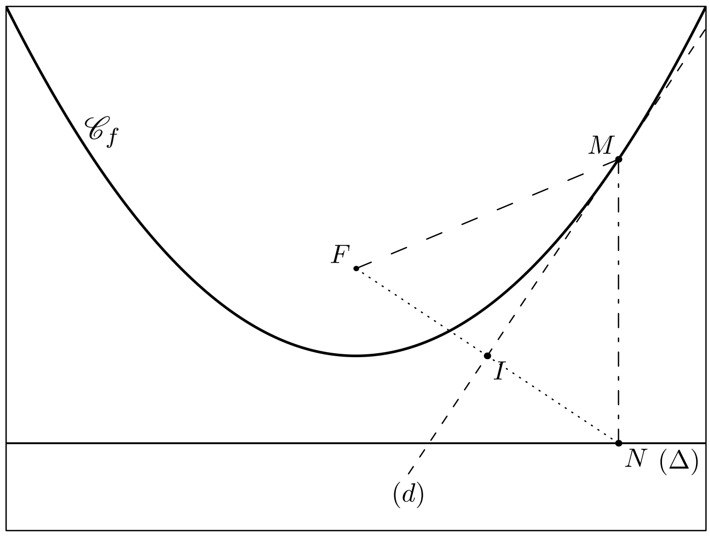


Fig. 3

3. Dans la figure 3 :

Prenons un point M quelconque de la courbe $\mathscr{C}_f$, associons le point N projeté du point M sur la directrice (Δ). Notons I le milieu du segment $[FN]$.

On note a l'abscisse du point M.

a. Justifier les coordonnées des points suivants :

$M(a\,;a^2)$; $N\left(a\,;-\dfrac{1}{4}\right)$

b. Démontrer que la droite (d) est la médiatrice du segment $[FN]$.

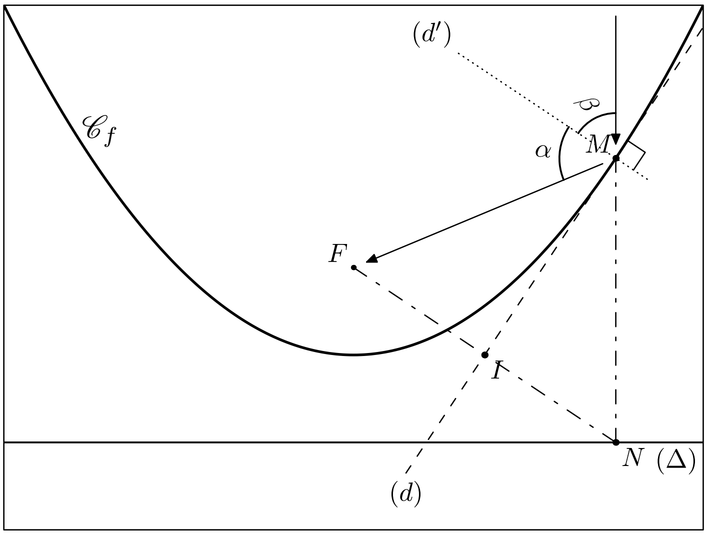


Fig. 4

4. Dans la figure 4 :

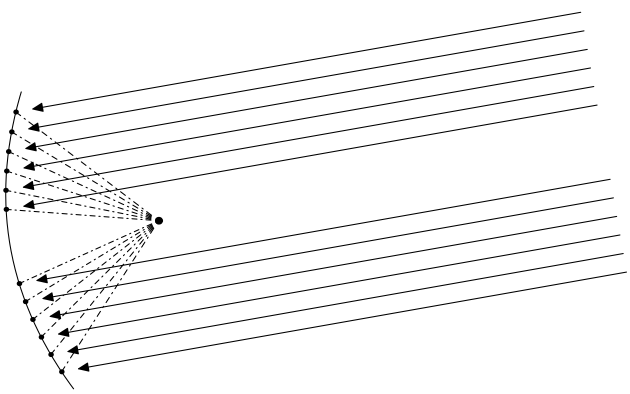
Dans cette question nous allons montrer que si un rayon *(symbolisé par les flèches)* et perpendiculaire à la directrice de la parabole vient se réfléchir sur la parabole alors il se dirigera vers le foyer.

Pour cela, on considérons la droite (d') perpendiculaire à la droite (d) et passant par le point M. Le rayon et la perpendiculaire définissent alors deux angles de mesures α et β.

Le but de la question est de montrer que les mesures α et β sont égales.

a. Justifier que l'angle $\widehat{FNM}$ a pour mesure β.

b. En déduire l'égalité des mesures α et β.



Approfondissement :

En classe de première, nous pourrons établir que la droite (d) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de contact M *(Fig. 3)*.

En classe de seconde, nous pouvons montrer que :

- La droite (d) intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ en un seul point ;
- La courbe $\mathscr{C}_f$ est du même côté de la droite (d).

Notons a l'abscisse du point M.

1. Montrer que la droite (d) admet pour équation :
   $y = 2a{\cdot}x - a^2$

2. a. Etablir que l'équation $x^2 - 2a{\cdot}x + a^2 = 0$ admet une unique solution.

   b. En déduire que la droite (d) et la courbe $\mathscr{C}_f$ s'interceptent en un seul point.

3. Pour prouver que la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe toujours au dessus de la droite (d), étudier le signe de l'expression :
   $f(x) - \left(2a{\cdot}x - a^2\right)$

