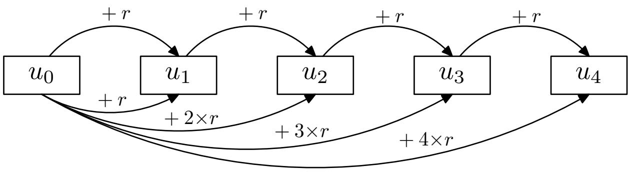
Limites de suites

A. Suite arithmétique:

Définition :

Une suite est arithmétique si pour passer d'un terme à son successeur, on additionne toujours le même nombre

$$u_{n+1} = u_n + r$$



$$u_n = u_0 + n \times r$$

Proposition : *(Propriété caractérisante)*

- Une suite est arithmétique si, et seulement si, la différence de terme consécutif est constant.

  La différence $u_{n+1} - u_n$ est alors la raison r.
- Une suite est arithmétique si, et seulement si, elle admet une forme explicite de la forme $u_n = a + b\cdot n$.

  Alors a est son premier terme et b est sa raison.

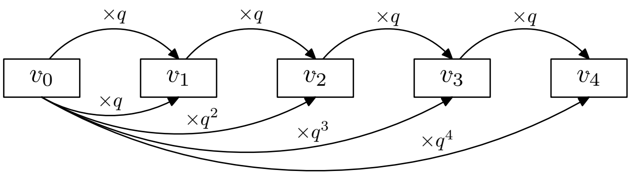
Exercices : 6523, 5121, 6530*

B. Suite géométrique:

Définition :

Une suite est géométrique si pour passer d'un terme à son successeur, on multiplie toujours par le même nombre

$$v_{n+1} = v_n \times q$$



$$v_n = v_0 \times q^n$$

Proposition : *(Propriété caractérisante)*

- Une suite est géométrique si, et seulement si, le quotient de deux termes consécutifs est constant.

  Le quotient ${}^{u_{n+1}}/_{u_n}$ est alors la raison q
- Une suite est géométrique si, et seulement si, elle admet une forme explicite de la forme $u_n = a \times b^n$.

  Alors a est son premier terme et b est sa raison.

Exercices : 6524, 5122, 5123, 2401*

C. Sommes des termes:

Proposition : *(Somme des termes d'une suite arithmétique)*

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)\cdot(u_0 + u_n)}{2}$$

Exemple :

Considérons la somme : $S = 2 + 5 + 8 + \cdots + 53$

On peut conjecturer que les termes de la somme sont les termes de la suite (u_n) arithmétique de premier terme 2 et de raison 3.

La somme s'écrit alors : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

Pour déterminer le rang n du dernier terme, considérons l'équation :

$$u_n = 53$$
$$2 + 3\cdot n = 53$$

On en déduit : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{17}$

Cette somme comporte 18 terme et sa somme s'exprime par :

$$S = \frac{18\times(2+53)}{2} = 495$$

Proposition : *(Somme des termes d'une suite géométrique)*

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q tel que $q \neq 1$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple :

Considérons la somme : $S = 3 + 6 + 12 + 24 + \cdots + 768$

On peut conjecturer que les termes de cette somme sont les termes de la suite (v_n) géométrique de premier terme 3 et de raison 2.

La somme s'écrit alors : $S = v_0 + v_1 + \cdot + v_n$

Pour déterminer le rang n du dernier terme, considérons l'équation :

$$u_n = 768$$
$$q^n = 256 = 2^8$$

On en déduit : $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_8$

Cette somme comporte 9 termes et sa valeur s'exprime par :

$$S = v_0 \cdot \frac{1 - q^9}{1 - q} = 3\cdot(2^9 - 1)$$

Remarque :

Voici les formules générales où p et n sont deux entiers vérifiant $p < n$:

- (u_n) suite arithmétique :
  $$u_p + u_{p+1} + \cdots + un - 1 + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$$
- (v_n) suite géométrique avec $q \neq 1$:
  $$u_p + u_{p+1} + \cdots + un - 1 + u_n = u_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Démonstration : *(Somme des termes d'une suite arithmétique)*

Pour tout entier naturel ℓ, le terme de rang k admet pour expression :

$$u_\ell = u_0 + \ell\cdot r$$

Ainsi, pour tout entier naturel k, on a :

$$u_k + u_{n-k} = (u_0 + k\cdot r) + \big[u_0 + (n-k)\cdot r\big]$$
$$= u_0 + k\cdot r + u_0 + (n-k)\cdot r = u_0 + u_0 + n\cdot r$$
$$= u_0 + u_n$$

Notons, S la somme des premiers termes de la suite (u_n) :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Cette somme peut aussi s'écrire :

$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_2 + u_1 + u_0$$

L'addition, termes à termes, des deux expressions de S permet d'obtenir l'égalité :

$$2{\cdot}S = \big(u_0+u_n\big)+\big(u_1+u_{n-1}\big)+\big(u_2+u_{n-2}\big)$$
$$+\cdots+\big(u_{n-2}{+}u_2\big)+\big(u_{n-1}{+}u_1\big)+\big(u_n{+}u_0\big)$$

D'après la remarque précédente :

$$2{\cdot}S = \big(u_0+u_n\big)+\big(u_0+u_n\big)+\big(u_0+u_n\big)$$
$$+\cdots+\big(u_n+u_0\big)+\big(u_n+u_0\big)+\big(u_n+u_0\big)$$

Cette somme comprend $n{+}1$ termes :

$$2{\cdot}S = \big(n+1\big){\cdot}\big(u_0+u_n\big)$$
$$S = \frac{\big(n+1\big){\cdot}\big(u_0+u_n\big)}{2}$$

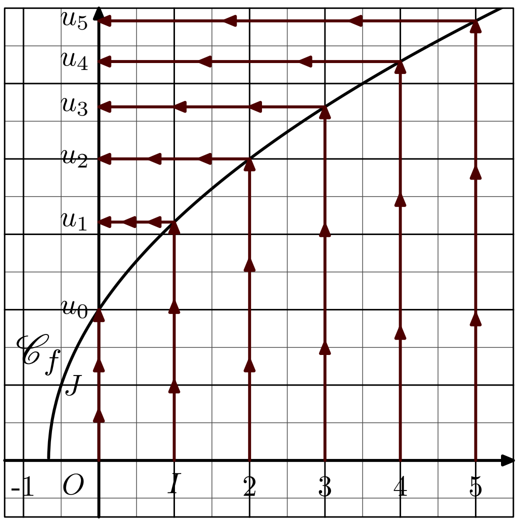
Démonstration : *(Somme des termes d'une suite géométrique)*

Notons S la somme des $n{+}1$ premiers termes de la suite (v_n). On a :

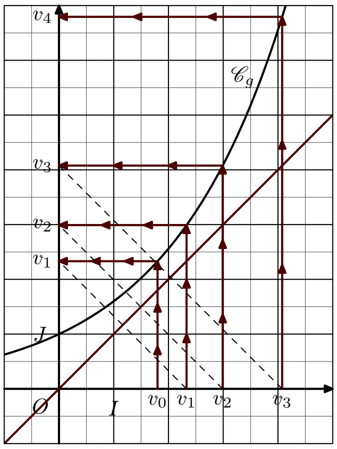
$$S = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-2}+v_{n-1}+v_n$$
$$(1-q){\cdot}S = (1{-}q){\cdot}\big(v_0{+}v_1{+}v_2{+}\cdots{+}v_{n-2}{+}v_{n-1}{+}v_n\big)$$
$$(1-q){\cdot}S = \big[v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-2}+v_{n-1}+v_n\big]$$
$$-q{\cdot}\big[v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-2}+v_{n-1}+v_n\big]$$
$$(1-q){\cdot}S = \big[v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-2}+v_{n-1}+v_n\big]$$
$$-\big[q{\cdot}v_0{+}q{\cdot}v_1{+}q{\cdot}v_2{+}\cdots{+}q{\cdot}v_{n-2}{+}q{\cdot}v_{n-1}{+}q{\cdot}v_n\big]$$
$$(1-q){\cdot}S = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-2}+v_{n-1}+v_n$$
$$-v_1-v_2-v_3-\cdots-v_{n-1}-v_n-v_{n+1}$$
$$(1-q){\cdot}S = v_0-v_{n+1}$$
$$(1-q){\cdot}S = v_0-v_0{\cdot}q^{n+1}$$
$$(1-q){\cdot}S = v_0{\cdot}\big(1-q^{n+1}\big)$$
$$S = v_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

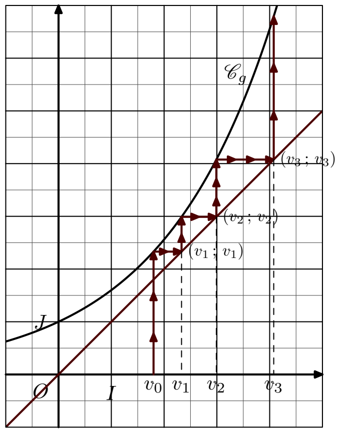
D. Représentation des suites :

- Suite définie explicitement : $u_n = f(n)$



- Suite récurrente : $v_{n+1} = g(v_n)$

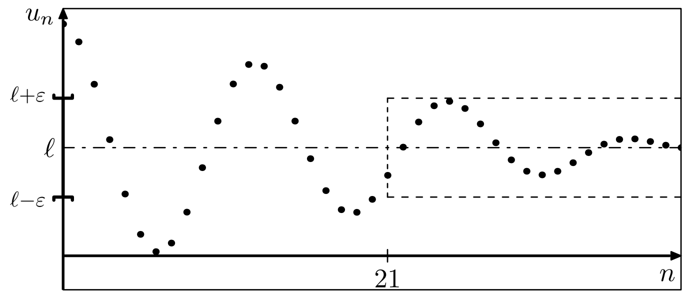




E. Convergence :

1. Définition :

Ci-dessous sont données deux représentations d'une suite (u_n) convergeant vers la valeur ℓ.

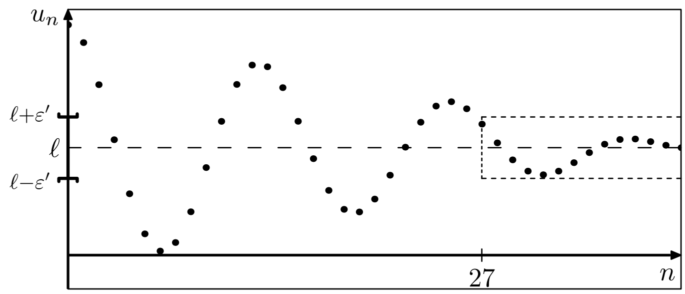


On remarque que tous les termes de la suite ont une valeur comprise dans l'intervalle $\big]\ell{-}\varepsilon\,;\ell{+}\varepsilon\big[$ lorsqu'on dépasse le terme 21.

On en déduit la relation :

$$\forall n \geqslant 21 \quad\Longrightarrow\quad u_n \in \big]\ell{-}\varepsilon\,;\ell{+}\varepsilon\big[$$

En prenant un intervalle ouvert plus petit $\big]\ell{-}\varepsilon'\,;\ell{+}\varepsilon'\big[$ mais toujours centré sur ℓ, il faut dépasser le rang 27 pour voir tous les termes de cette suite compries dans cet intervalle



On a la relation : $\forall n \geqslant 27 \quad\Longrightarrow\quad u_n \in \big]\ell{-}\varepsilon'\,;\ell{+}\varepsilon'\big[$

Définition : *(convergence finie)*

Une suite (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On note : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \ell$

Remarque :

- Cette définition est difficilement exploitable en classe de terminale. On l'utilise essentiellement dans le raisonnement par l'absurde présent en fin de paragraphe.

- Voici la définition d'une suite (u_n) convergente vers ℓ :
  $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists N\in\mathbb{N})\ \big(n\geqslant N \implies |u_n-\ell|<\varepsilon\big)$

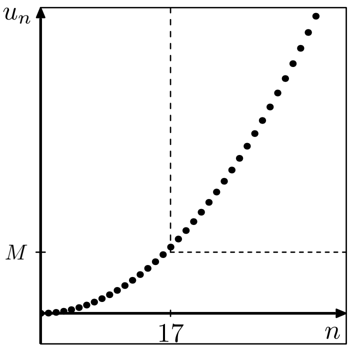
Définition :

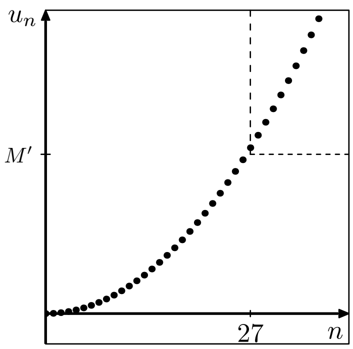
Une suite qui n'est pas convergente vers une limite $\ell\in\mathbb{R}$ est dite divergente

Définition : *(Divergence - limite infinie)*

Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ *(resp. $-\infty$)* quand n tend vers $+\infty$ si pour tout intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ *(resp. $]-\infty\,;m[$)* contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On note : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=+\infty$ *(resp. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=-\infty$)*





Remarque :

- Une suite qui est divergente n'admet pas nécessaire une limite infinie. Voici deux exemples :
  - (u_n) définie par : $u_n=\cos(n)$
  - (v_n) définie par : $v_0=1$; $v_{n+1}=-2\cdot v_n$
- Voici la définition d'une suite (u_n) admettant $+\infty$ pour limite :
  $(\forall M\in\mathbb{R})(\exists N\in\mathbb{N})\big(n\geqslant N \implies u_n\geqslant M\big)$

2. Arithmétique et géométrique :

Proposition :

Soit (u_n) est une suite arithmétique.

- Si $r<0$ alors $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=-\infty$.
- Si $r=0$ alors $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=u_0$.
- Si $r>0$ alors $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=+\infty$.

Proposition : *(admise - démontrée plus tard)*

Soit (u_n) une suite géométrique :

- Si $0\leqslant q<1$ alors $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=0$
- Si $q=1$ alors $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=u_0$
- Si $q>1$ et :
  - si $u_0>0$ alors $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=+\infty$
  - si $u_0<0$ alors $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=-\infty$
- Si $q<0$:
  - et si $-1<q\leqslant0$ alors la suite (u_n) est alternée et $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=0$
  - et si $q\leqslant-1$ alors la suite (u_n) est alternée et divergente

3. Suite arithmético-géométrique :

Exercice 1

Soit (u_n) définie par :

$$u_0=5 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+4 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Soit (v_n) définie par : $v_n=u_n-6$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Correction 1

1. $v_{n+1}=u_n-6=\Big(\dfrac{1}{3}\cdot u_{n+1}+4\Big)-6=\dfrac{1}{3}\cdot u_n-2$
   $=\dfrac{1}{3}\cdot u_n-\dfrac{1}{3}\times6=\dfrac{1}{3}\cdot(u_n-6)=\dfrac{1}{3}\cdot v_n$
   La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.
2. $v_0=5-6=-1 \implies v_n=-1\cdot\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^n$
   $v_n=u_n-6 \implies -1\cdot\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^n=u_n-6$
   $\implies u_n=-1\cdot\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^n+6$
3. $0\leqslant\dfrac{1}{3}<1 \implies \displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n=0$
   On en déduit :
   $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n=\lim_{n\mapsto+\infty} -1\cdot\Big(\frac{1}{3}\Big)^n+6=0+6=6$

4. Utilisation calculatrice :

- **Calculatrice Casio**

  Choisissez le mode "`RECUR`" *(Fig. 1)*. Vous avez la possibilité de définir 3 suites *(Fig. 2)*.
  Le bouton "`TYPE`" *(Fig. 3)* permet de définir une suite suivant les trois modèles suivants :
  - Suite définie explicitement : $u_n=f(n)$
  - Suite récurrente d'ordre 1 : $u_{n+1}=f(u_n)$
  - Suite récurrente d'ordre 2 : $u_{n+1}=f(u_n\,,u_{n+1})$

  Le bouton `SET` permet de définir les rangs des termes affichés *(`Start` et `End`)* et les valeurs initialisant les suites.
  Le bouton `TABL` permet d'afficher les termes de la suite.

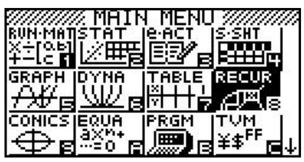


Fig. 1

Fig. 2

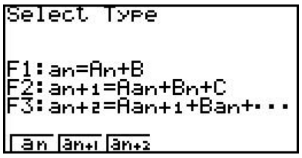


Fig. 3

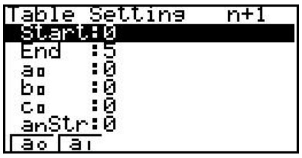


Fig. 4

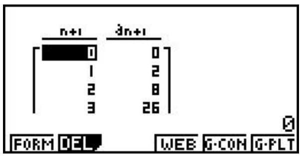


Fig. 5

- **Calculatrice Texas Instrument**

  Cliquez le bouton `MODE` *(Fig. 1)* et choisissez le mode "`Seq`" *(séquentiel ou suite)*. Le bouton `Y=` *(Fig. 2)* permet de saisir la définition de la suite "`u(n)=`" et sa valeur initiale "`u(nMin)=`".
  Le bouton `TABLE` permet d'afficher les valeurs des termes de la suite *(Fig. 3)*.
  Dans le cas d'une suite définie par récurrence et d'ordre 2, il faut définir deux valeurs initiales à l'aide d'accolade *(Fig. 4)*.

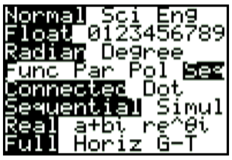


Fig. 1

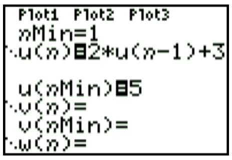


Fig. 2

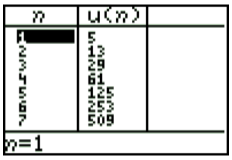


Fig. 3

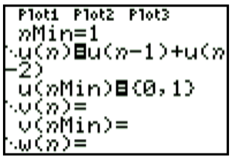


Fig. 4

5. *Unicité de la limite :*

Proposition : *(non-exigible)*

Soit ℓ un nombre réel. On considère une suite (u_n) qui converge vers ℓ alors le réel ℓ vers lequel converge la suite (u_n) est unique.

Preuve :

Nous allons effectuer un raisonnement par l'absurde et supposer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et converge également vers un réel ℓ' tels que $\ell \neq \ell'$

La définition de la convergence d'une suite vers un réel permet d'obtenir les deux propriétés suivantes de la suite (u_n) :

- La suite (u_n) convergeant vers le réel ℓ alors pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) appartient à l'intervalle I.
- La suite (u_n) convergeant vers le réel ℓ' alors pour tout intervalle ouvert I' contenant ℓ', il existe un rang N' à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) appartient à l'intervalle I'.

Les deux réels ℓ et ℓ', notons ε la distance entre ces deux nombres : $\varepsilon = |\ell - \ell'|$

Considérons les deux intervalles suivants :

$$I = \left]\ell - \frac{\varepsilon}{3}\,;\,\ell + \frac{\varepsilon}{3}\right[\quad ; \quad I' = \left]\ell' - \frac{\varepsilon}{3}\,;\,\ell' + \frac{\varepsilon}{3}\right[$$

Ces deux intervalles étant ouverts et contenant respectivement ℓ et ℓ', d'après les propriétés de convergence de la suite (u_n) :

- il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geqslant N_1 \implies u_n \in I$
- il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geqslant N_2 \implies u_n \in I'$

Ainsi, en choisissant un entier naturel n_0 à la fois supérieur à N_1 et N_2, le terme u_{n_0} de rang n_0 vérifiera :
$u_{n_0} \in I \quad ; \quad u_{n_0} \in I'$

Ce qui est absurde puisque les deux intervalles I et I' sont disjoints comme le montre le schéma ci-dessous :