Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par la relation :

$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_{n+2} = 2{\cdot}u_{n+1} - u_n$

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 3.

Correction 1

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$\mathcal{P}_n$: "$u_{n+1} - u_n = 3$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n est vraie.

- **Initialisation :**

  D'après les valeurs de l'énoncé, on a :
  $u_1 - u_0 = 4 - 1 = 3$

  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'égalité comme hypothèse de récurrence :
  $u_{n+1} - u_n = 3.$

  Etudions la différence suivante :
  $u_{n+2} - u_{n+1} = (2{\cdot}u_{n+1} - u_n) - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$

  En utilisant l'hypothèse de récurrence :
  $= 3$

  On vient de montrer $u_{n+2}-u_{n+1}=3$: la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- *Conclusion :*

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisé au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Remarque :

Les **axiomes de Peano** *(XIX^e siècle)* définissant l'ensemble des entiers naturels comportent la propriété suivante :

"Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, si $0 \in E$ et si, pour tout élément x de E, son successeur appartient à E alors $E = \mathbb{N}$"

Cette propriété de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels permet de définir le **raisonnement par récurrence** :

"Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie (mais pas nécessairement vraie) pour tout entier naturel n. Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si l'implication $(\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1))$ est réalisée pour tout entier naturel n alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n."

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par la relation :

$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_{n+2} = 2{\cdot}u_{n+1} - u_n$

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 3.

Correction 1

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$\mathcal{P}_n$: "$u_{n+1} - u_n = 3$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n est vraie.

- **Initialisation :**

  D'après les valeurs de l'énoncé, on a :
  $u_1 - u_0 = 4 - 1 = 3$

  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'égalité comme hypothèse de récurrence :
  $u_{n+1} - u_n = 3.$

  Etudions la différence suivante :
  $u_{n+2} - u_{n+1} = (2{\cdot}u_{n+1} - u_n) - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$

  En utilisant l'hypothèse de récurrence :
  $= 3$

  On vient de montrer $u_{n+2}-u_{n+1}=3$: la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- *Conclusion :*

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisé au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Remarque :

Les **axiomes de Peano** *(XIX^e siècle)* définissant l'ensemble des entiers naturels comportent la propriété suivante :

"Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, si $0 \in E$ et si, pour tout élément x de E, son successeur appartient à E alors $E = \mathbb{N}$"

Cette propriété de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels permet de définir le **raisonnement par récurrence** :

"Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie (mais pas nécessairement vraie) pour tout entier naturel n. Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si l'implication $(\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1))$ est réalisée pour tout entier naturel n alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n."

