Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par la relation :

$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2 \cdot u_n}$

1. Etablir la croissance de la fonction f définie par :
   $f(x) = \sqrt{2 \cdot x}$
2. Démonter que tout entier naturel n, on a :
   $0 < u_n \leqslant 2$
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Correction 1

1. La fonction f admet pour dérivée :
   $$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*$$
   On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
   $\mathcal{P}_n$: "$0 < u_n \leqslant 2$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n est vraie.
   - **Initialisation :**
     On a : $u_0 = 1 \implies 0 < u_0 \leqslant 2$
     On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :**
     Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'égalité comme hypothèse de récurrence :
     $0 < u_n \leqslant 2$
     Par la croissance de la fonction f :
     $f(0) < f(u_n) \leqslant f(2)$
     $\sqrt{2 \times 0} < f(u_n) \leqslant \sqrt{2 \times 2}$
     $0 < f(u_n) \leqslant 2$
     La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - *Conclusion :*
     La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisé au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.
3. Considérons la propriété $\mathcal{Q}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
   $\mathcal{Q}_n$: "$u_n \leqslant u_{n+1}$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout entier naturel n est vraie.
   - **Initialisation :**
     On a : $u_0 = 1$; $u_1 = \sqrt{2} \implies 0 < u_0 \leqslant 2$
     On vient de montrer que la propriété $\mathcal{Q}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :**
     Supposons que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'égalité comme hypothèse de récurrence :
     $u_n \leqslant u_{n+1}$
     Par la croissance de la fonction f :
     $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$
     $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$
     La propriété $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.
   - *Conclusion :*
     La propriété $\mathcal{Q}_n$ est initialisé au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par la relation :

$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2 \cdot u_n}$

1. Etablir la croissance de la fonction f définie par :
   $f(x) = \sqrt{2 \cdot x}$
2. Démonter que tout entier naturel n, on a :
   $0 < u_n \leqslant 2$
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Correction 1

1. La fonction f admet pour dérivée :
   $$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*$$
   On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
   $\mathcal{P}_n$: "$0 < u_n \leqslant 2$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n est vraie.
   - **Initialisation :**
     On a : $u_0 = 1 \implies 0 < u_0 \leqslant 2$
     On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :**
     Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'égalité comme hypothèse de récurrence :
     $0 < u_n \leqslant 2$
     Par la croissance de la fonction f :
     $f(0) < f(u_n) \leqslant f(2)$
     $\sqrt{2 \times 0} < f(u_n) \leqslant \sqrt{2 \times 2}$
     $0 < f(u_n) \leqslant 2$
     La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - *Conclusion :*
     La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisé au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.
3. Considérons la propriété $\mathcal{Q}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
   $\mathcal{Q}_n$: "$u_n \leqslant u_{n+1}$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout entier naturel n est vraie.
   - **Initialisation :**
     On a : $u_0 = 1$; $u_1 = \sqrt{2} \implies 0 < u_0 \leqslant 2$
     On vient de montrer que la propriété $\mathcal{Q}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :**
     Supposons que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'égalité comme hypothèse de récurrence :
     $u_n \leqslant u_{n+1}$
     Par la croissance de la fonction f :
     $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$
     $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$
     La propriété $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.
   - *Conclusion :*
     La propriété $\mathcal{Q}_n$ est initialisé au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

