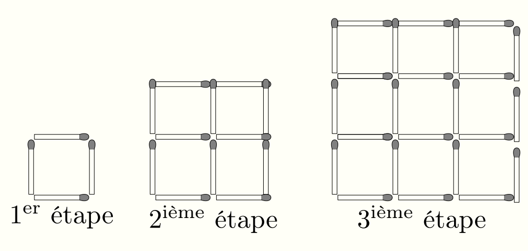
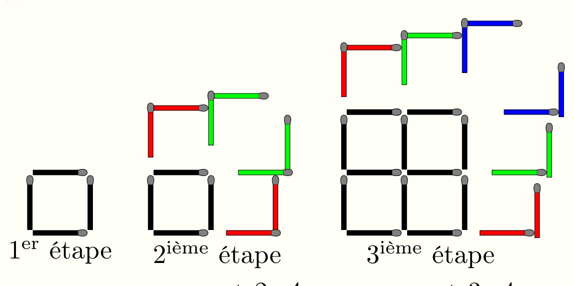
Exemple :

Considérons la construction des motifs successifs ci-dessous à l'aide d'allumettes :



En notant u_n le nombre d'allumettes utilisées pour construire le motif à l'étape n et à l'aide de la représentation ci-dessous :

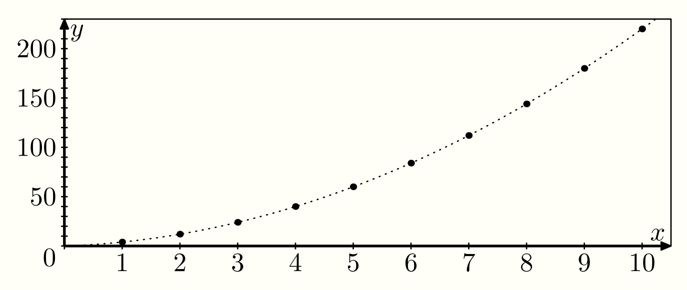


$u_2 = u_1 + 2\times 4 \qquad u_3 = u_2 + 3\times 4$

On établit la relation de récurrence :

$$u_1 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 4\cdot n$$

Ci-dessous, la représentation des 10 premiers termes de la suite (u_n) :



On reconnait l'aspect des paraboles et après quelques recherches, on conjecture que la suite (u_n) est égale à la suite (v_n) définie explicitement pour tout entier naturel n strictement positif par :

$$v_n = 2\cdot n^2 + 2\cdot n$$

On établit cette conjecture en :

- Montrant que ces deux suites ont le même premier terme :

  $$u_1 = 4 \quad ; \quad v_1 = 2\times 1^2 + 2\times 1 = 2 + 2 = 4$$

- En montrant que la suite (v_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (u_n) :

  - $v_{n+1} = 2\cdot(n+1)^2 + 2\cdot(n+1) = 2\cdot(n^2+2\cdot n+1) + 2\cdot n + 2$
    $= 2\cdot n^2 + 4\cdot n + 2 + 2\cdot n + 2 = 2\cdot n^2 + 6\cdot n + 4$
  - $v_n + 4(n+1) = (2n^2 + 2n) + 4n + 4$
    $= 2n^2 + 6n + 4$

Ces deux suites sont donc égales : à l'étape n, il faut $2\cdot n^2 + 2\cdot n$ allumettes pour construire le motif.

https://chingatome.fr