Nombres complexes

A. Introduction / Définition :

Définition :

On note i un nombre vérifiant l'équation : $i^2 = -1$

Remarque :

Le nombre i est alors racine du polynôme x^2+1 :
$i^2+1 = (-1)+1 = 0$

Le discriminant de ce polynôme a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 0^2 - 4{\times}1{\times}1 = -4$

Définition :

- On note $\mathbb{C}$ l'ensemble définie par :
  $\{\ a+i{\cdot}b \ \ | \ \ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\ \}$
  Cet ensemble s'appelle l'ensemble des **nombres complexes**.
- Pour tout nombre complexe z $(z\in\mathbb{C})$, il existe deux uniques réels a et b tels que :
  $z = a+i{\cdot}b$
  Cette écriture s'appele l'**écriture algébrique** du nombre complexe z.
  - Le nombre a s'appelle la **partie réelle** de z et se note $Re(z)$.
  - Le nombre b s'appelle la **partie imaginaire** de z et se note $Im(z)$.

Proposition :

En munissant l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes des opérations connues sur $\mathbb{R}$, on a :

1. La somme de deux nombres complexes est un nombre complexe.
2. La différence de deux nombres complexes est un nombre complexe.
3. Le produit de deux nombres complexes est un nombre complexe.
4. L'inverse d'un nombre complexe est un nombre complexe.

Preuve :

On considère deux nombres complexes z et z'. C'est à dire qu'il existe a, b, a', b' quatre réels tels que :
$z = a+i{\cdot}b \quad ; \quad z' = a'+i{\cdot}b'$

1. $z+z' = \big(a+i{\cdot}b\big) + \big(a'+i{\cdot}b'\big) = \big(a+a'\big) + i{\cdot}\big(b+b'\big)$

   Ainsi, le nombre complexe $z+z'$ vérifie :
   $Re(z+z') = a+a' \quad ; \quad Im(z+z') = b+B'$

2. $z-z' = \big(a+i{\cdot}b\big) - \big(a'+i{\cdot}b'\big) = \big(a-a'\big) + i{\cdot}\big(b-b'\big)$

   Ainsi, le nombre complexe $z-z'$ vérifie :
   $Re(z-z') = a-a' \quad ; \quad Im(z-z') = b+B'$

3. $$\begin{aligned} z{\cdot}z' &= \big(a+i{\cdot}b\big)\big(a'+i{\cdot}b'\big) \\ &= a{\cdot}a' + a{\cdot}\big(i{\cdot}b'\big) + \big(i{\cdot}b\big){\cdot}a' + \big(i{\cdot}b\big)\big(i{\cdot}b'\big) \\ &= a{\cdot}a' + i{\cdot}a{\cdot}b' + i{\cdot}a'{\cdot}b + i^2{\cdot}b{\cdot}b' \\ &= a{\cdot}a' + i{\cdot}\big(a{\cdot}b' + a'{\cdot}b\big) + (-1){\cdot}b{\cdot}b' \\ &= \big(a{\cdot}a' - b{\cdot}b'\big) + i{\cdot}\big(a{\cdot}b' + a'{\cdot}b\big) \end{aligned}$$

   Ainsi, le nombre complexe $z{\cdot}z'$ vérifie :
   $Re(z{\cdot}z') = a{\cdot}a' - b{\cdot}b' \quad ; \quad Im(z{\cdot}z') = a{\cdot}b' + a'{\cdot}b$

4. $$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a+i{\cdot}b} = \frac{1{\cdot}\big(a-i{\cdot}b\big)}{\big(a+i{\cdot}b\big)\big(a-i{\cdot}b\big)} \\ &= \frac{a-i{\cdot}b}{a{\cdot}a + a{\cdot}\big(-i{\cdot}b\big) + \big(i{\cdot}b\big){\cdot}a + \big(i{\cdot}b\big)\big(-i{\cdot}b\big)} \\ &= \frac{a-i{\cdot}b}{a^2 - i{\cdot}a{\cdot}b + i{\cdot}a{\cdot}b - i^2{\cdot}b^2} = \frac{a-i{\cdot}b}{a^2-(-1){\cdot}b^2} \\ &= \frac{a-i{\cdot}b}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i{\cdot}\frac{-b}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

   Ainsi, le nombre complexe $z{\cdot}z'$ vérifie :
   $Re\Big(\frac{1}{z}\Big) = \frac{a}{a^2+b^2} \quad ; \quad Im\Big(\frac{1}{z}\Big) = \frac{-b}{a^2+b^2}$

Exemple :

Déterminons l'écriture algébrique des calculs suivant dans l'ensemble $\mathbb{C}$:

- $\big(3-2{\cdot}i\big)\big(1+i\big) = 3+3{\cdot}i-2{\cdot}i-2{\cdot}i^2 = 3+i-2{\cdot}(-1)$
  $= 3+i+2 = 5+i$
- $\big(3+2{\cdot}i\big)^2 = 3^2 + 2{\times}3{\times}2{\cdot}i + \big(2{\cdot}i\big)^2 = 9+12{\cdot}i+4{\cdot}i^2$
  $= 9+12{\cdot}i+4{\cdot}(-1) = 9+12{\cdot}i-4 = 5+12{\cdot}i$
- $\dfrac{1+i}{1-2{\cdot}i} = \dfrac{\big(1+i\big)\big(1+2{\cdot}i\big)}{\big(1-2{\cdot}i\big)\big(1+2{\cdot}i\big)} = \dfrac{1+2{\cdot}i+i+2{\cdot}i^2}{1^2-\big(2{\cdot}i\big)^2}$
  $= \dfrac{1+3{\cdot}i+2{\cdot}(-1)}{1-4{\cdot}(-1)} = \dfrac{-1+3{\cdot}i}{1+4} = \dfrac{-1}{5} + \dfrac{3{\cdot}i}{5}$

Exemple :

Résolvons l'équation $3{\cdot}z+i-2=3$:

$$\begin{aligned} 3{\cdot}z+i-2 &= 3 \\ 3{\cdot}z &= 3-i+2 \\ 3{\cdot}z &= 5-i \\ z &= \frac{5-i}{3} \\ z &= \frac{5}{3} - \frac{i}{3} \end{aligned}$$

Remarque :

L'écriture algébrique d'une nombre complexe est unique. En particulier, le nombre réel 0 s'écrit :
$0 = 0+0{\cdot}i$

Preuve :

Résolvons l'équation : $z+i{\cdot}z=1+5{\cdot}i$

$$z+i{\cdot}z = 1+5{\cdot}i$$

Notons $a+i{\cdot}b$ l'écriture algébrique de z :

$$\big(a+i{\cdot}b\big) + i{\cdot}\big(a+i{\cdot}b\big) = 1+5{\cdot}i$$

$$\begin{aligned} a+i{\cdot}b+i{\cdot}a+i^2{\cdot}b-1-5{\cdot}i &= 0 \\ a+i{\cdot}b+i{\cdot}a-b-1-5{\cdot}i &= 0 \\ \big(a-b-1\big) + i{\cdot}\big(a+b-5\big) &= 0 \end{aligned}$$

Le nombre 0 admet pour écriture $0+0{\cdot}i$:

$$\big(a-b-1\big) + i{\cdot}\big(a+b-5\big) = 0+0{\cdot}i$$

L'écriture algébrique d'un nombre complexe étant unique, il est nécessaire d'avoir les égalités des parties réelles et des parties imaginaires :

$$\begin{cases} a-b-1=0 \\ a+b-5=0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient une unique solution $(3\,;2)$. Ainsi, l'équation admet pour solution le nombre complexe $3+2\cdot i$.

B. Conjugué d'un nombre complexe:

Définition:

Soit z un nombre complexe admettant pour écriture algébrique $a+i\cdot b$ avec a et b réels.
On appelle **conjugé de** z le nombre complexe noté $\overline{z}$ ayant pour écriture algébrique:

$\overline{z} = a - i\cdot b$

Exemple:

$$(3+4\cdot i)\cdot\overline{(2-i)} = (3+4\cdot i)\cdot(2+i) = 6+3\cdot i+8\cdot i+4\cdot i^2$$
$$= 6+11\cdot i+4\cdot(-1) = 2+11\cdot i$$

Exemple:

- Résolvons l'équation: $z+i=3+2\cdot\overline{z}$

  Il existe deux réels a et b tel que le nombre complexe z admette l'écriture algébrique $z = a+i\cdot b$

  Résolvons l'équation:
  $$z+i = 3+2\cdot\overline{z}$$
  $$\big(a+i\cdot b\big)+i = 3+2\cdot\overline{a+i\cdot b}$$
  $$a+i\cdot b+i = 3+2\cdot\big(a-i\cdot b\big)$$
  $$a+i\cdot b+i = 3+2\cdot a-i\cdot 2\cdot b$$
  $$a+i\cdot b+i-3-2\cdot a+i\cdot 2\cdot b = 0$$
  $$\big(a-3-2\cdot a\big)+i\cdot\big(b+1+2\cdot b\big) = 0$$
  $$\big(-a-3\big)+i\cdot\big(3\cdot b+1\big) = 0$$

  De l'écriture du réel 0:

  $$\begin{array}{r|r} -a-3=0 & 3\cdot b+1=0 \\ -a=3 & 3\cdot b=-1 \\ a=-3 & b=-\dfrac{1}{3} \end{array}$$

  Ainsi, cette équation admet une unique solution $-3-i\cdot\dfrac{1}{3}$

- Résolvons l'équation: $i\cdot\big(z+\overline{z}\big)=\overline{z}-z$

  Notons $a+i\cdot b$ l'écriture algébrique du nombre z. On a:
  $$i\cdot\big(z+\overline{z}\big) = \overline{z}-z$$
  $$i\big[\big(a+i\cdot b\big)+\overline{a+i\cdot b}\big] = \overline{a+i\cdot b}-\big(a+i\cdot b\big)$$
  $$i\big(a+i\cdot b+a-i\cdot b\big) = a-i\cdot b-a-i\cdot b$$
  $$i\cdot a+i^2\cdot b+i\cdot a-i^2\cdot b = -2i\cdot b$$
  $$2\cdot i\cdot a = -2i\cdot b$$
  $$2\cdot i\cdot a+2i\cdot b = 0$$
  $$0+2\cdot i\cdot\big(a+b\big) = 0+0\cdot i$$

  On en déduit l'équation:
  $2\cdot\big(a+b\big) = 0$

  Un produit est nul, si et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul:
  $$a+b = 0$$
  $$b = -a$$

  Ainsi, l'ensemble des solutions est:
  $$\mathcal{S} = \big\{a-a\cdot i \;\big|\; a\in\mathbb{R}\big\}$$
  qui dans le plan complexe est représenté par la droite d'équation $y=-x$.

  - L'équation $z+i\cdot\overline{z}=1$ a pour ensemble de solutions:
    $\mathcal{S} = \varnothing$
  - L'équation $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}=0$ a pour ensemble de solutions:
    $\mathcal{S} = \big\{i\cdot b \;\big|\; b\in\mathbb{R}^*\big\}$
    qui dans le plan complexe est l'axe des imaginaires purs privée de O.
  - L'équation $\overline{z}-\dfrac{1}{z}=0$ a pour ensemble de solutions:
    $\mathcal{S} = \big\{a+i\cdot b \;\big|\; a^2+b^2-1=0\big\}$
    qui dans le plan complexe est le cercle de centre O et de rayon 1.

Définition:

- On dit qu'un nombre complexe est un **réel** si sa partie imaginaire est nul .
- On dit qu'un nombre complexe est un **imaginaire** pur si sa partie réelle est nul.

Proposition:

Soit z un nombre complexe.

- z est un réel $\iff$ $z=\overline{z}$
- z est un imaginaire pur $\iff$ $z=-\overline{z}$

Proposition:

Soient z et z' deux nombres complexes:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{z\cdot z'} = \overline{z}\cdot\overline{z'}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}$ où $n\in\mathbb{N}$
- $\overline{\Big(\dfrac{1}{z}\Big)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ où $z\neq 0$
- $\overline{\Big(\dfrac{z}{z'}\Big)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ où $z'\neq 0$

Preuve:

Soit z et z' deux nombres complexes. Il existe quatre réels a, b, a', b' tels que:
$z = a+i\cdot b \quad ; \quad z' = a'+i\cdot b'$

- $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+i\cdot b}} = \overline{a-i\cdot b} = a+i\cdot b = z$
- - $z+z' = \big(a+i\cdot b\big)+\big(a'+i\cdot b'\big)$
    $= \big(a+a'\big)+i\cdot\big(b+b'\big)$

    On en déduit: $\overline{z+z'} = \big(a+a'\big)-i\cdot\big(b+b'\big)$
  - $\overline{z}+\overline{z'} = \overline{a+i\cdot b}+\overline{a'+i\cdot b'} = \big(a-i\cdot b\big)+\big(a'-i\cdot b'\big)$
    $= \big(a+a'\big)-i\cdot\big(b+b'\big)$

  On en déduit: $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$
- On a:
  - $z\cdot z' = \big(a+i\cdot b\big)\big(a'+i\cdot b'\big)$
    $= a\cdot a'+a\cdot b'\cdot i+a'\cdot b\cdot i+b\cdot b'\cdot i^2$
    $= a\cdot a'+a\cdot b'\cdot i+a'\cdot b\cdot i-b\cdot b'$
    $= \big(a\cdot a'-b\cdot b'\big)+i\cdot\big(a\cdot b'+a'\cdot b\big)$

    On en déduit:
    $\overline{z\cdot z'} = \big(a\cdot a'-b\cdot b'\big)-i\cdot\big(a\cdot b'+a'\cdot b\big)$
  - $\overline{z}\cdot\overline{z'} = \overline{a+i\cdot b}\cdot\overline{a'+i\cdot b'} = \big(a-i\cdot b\big)\big(a'-i\cdot b'\big)$
    $= a\cdot a'-a\cdot b'\cdot i-a'\cdot b\cdot i+b\cdot b'\cdot i^2$
    $= a\cdot a'-a\cdot b'\cdot i-a'\cdot b\cdot i-b\cdot b'\cdot$
    $= \big(a\cdot a'-b\cdot b'\cdot\big)-i\cdot\big(a\cdot b'+a'\cdot b\big)$

On en déduit : $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$

- Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par :
  $\mathcal{P}_n$: "$\overline{z^n} = \overline{z}^n$"

  Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

  - **Initialisation :**
    Pour $n=0$, on a :
    $\overline{z^0} = \overline{1} = 1 \quad ; \quad \overline{z}^0 = 1$
    La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
  - **Hérédité :**
    Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
    $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
    On a :
    $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \cdot z}$
    D'après la propriété précédente :
    $= \overline{z^n} \cdot \overline{z}$
    D'après l'hypothèse de récurrence :
    $= \overline{z}^n \cdot \overline{z} = \overline{z}^{n+1}$
    On vient de montrer que : $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
  - **Conclusion :**
    La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée pour $n=0$ et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, lon vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

- On a :
  - $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+i\cdot b} = \dfrac{1\cdot(a-i\cdot b)}{(a+i\cdot b)(a-i\cdot b)} = \dfrac{a-i\cdot b}{a^2-(i\cdot b)^2}$
    $= \dfrac{a-i\cdot b}{a^2-i^2\cdot b^2} = \dfrac{a-i\cdot b}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\cdot\dfrac{b}{a^2+b^2}$
    On en déduit : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\cdot\dfrac{b}{a^2+b^2}$
  - $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{a-i\cdot b} = \dfrac{1\cdot(a+i\cdot b)}{(a-i\cdot b)(a+i\cdot b)} = \dfrac{a+i\cdot b}{a^2-(i\cdot b)^2}$
    $= \dfrac{a+i\cdot b}{a^2-i^2\cdot b^2} = \dfrac{a+i\cdot b}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\cdot\dfrac{b}{a^2+b^2}$

  On en déduit : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

- Pour cette démonstration, on utilisera les points précédemments prouvés :
  $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z\cdot\dfrac{1}{z'}\right)} = \overline{z}\cdot\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \overline{z}\cdot\dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

C. Equations du second degré:

Proposition :

Considérons l'équation $a\cdot z^2+b\cdot z+c=0$ où a, b et c sont des nombres réels et où $a\neq 0$

On définit le discriminant Δ du polynôme du second degré par :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c$

Cette équation admet toujours dans $\mathbb{C}$ des solutions ; plus précisement :

- Si $\boldsymbol{\Delta > 0}$, l'équation admet deux solutions :
  $$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$$
  Ces deux solutions sont réelles.
- Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$, l'équation admet une unique solution :
  $$z = -\frac{b}{2\cdot a}$$
  Cette solution est réelle.
- Si $\boldsymbol{\Delta < 0}$, l'équation admet deux solutions :
  $$z_1 = \frac{-b-i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b+i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}$$
  Ces deux solutions sont complexes et conjuguées.

Preuve :

On a la factorisation suivante :

$$a\cdot z^2+b\cdot z+c = a\cdot\left(z^2+\frac{b}{a}\cdot z+\frac{c}{a}\right)$$
$$= a\cdot\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4\cdot a^2} + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\cdot\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a^2}\right] = a\cdot\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\cdot a^2}\right]$$

- $\boldsymbol{\Delta > 0}$: on peut écrire $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$

  On a les transformations algébriques suivantes :
  $$a\cdot z^2+b\cdot z+c = a\cdot\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)^2\right]$$
  $$= a\cdot\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)$$
  $$= a\cdot\left(z+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)\left(z+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)$$
  $$= a\cdot\left(z-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)\left(z-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)$$
  Ainsi, l'équation a pour solutions les deux nombres réels :
  $$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$$
- $\boldsymbol{\Delta = 0}$
  $$a\cdot z^2+b\cdot z+c = a\cdot\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)^2\right] = a\cdot\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$$
  Cette équation s'annule pour $z = -\dfrac{b}{2a}$
- $\boldsymbol{\Delta < 0}$: on peut écrire : $-\Delta = \left(\sqrt{-\Delta}\right)^2$

  On a les transformations algébriques suivantes :

$$a\cdot z^2+b\cdot z+c = a\cdot\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{i^2\cdot(-\Delta)}{4\cdot a^2}\right]$$
$$= a\cdot\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{i^2\cdot(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\cdot a)^2}\right]$$
$$= a\cdot\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}\right)^2\right]$$
$$= a\cdot\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}\right)$$
$$= a\cdot\left(z+\frac{b+i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}\right)\left(z+\frac{b-i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}\right)$$
$$= a\cdot\left(z-\frac{-b-i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}\right)\left(z-\frac{-b+i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}\right)$$

Ainsi, l'équation admet les deux solutions suivantes :
$$z_1=\frac{-b-i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a} \quad ; \quad z_2=\frac{-b+i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}$$

D. Représentation graphique :

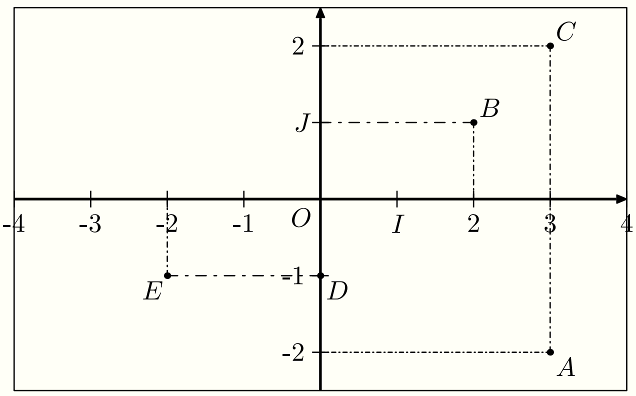
Définition :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$:

- A tout nombre complexe z, dont l'écriture algébrique est $a+i\cdot b$, on associe de manière unique un point du plan M dont les coordonnées sont $(a\,;b)$.
  Le point M est appelé l'**image** du nombre complexe z.
- A tout point M du plan, dont les coordonnées sont $(x\,;y)$, on associe de manière unique un nombre complexe z dont l'écriture algébrique est $x+i\cdot y$.
  Le nombre complexe z s'appelle l'**affixe** du point M.

Exemple :

On considère le plan muni du repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



On a :

- Le nombre complexe $z_1=3-2\cdot i$ admet pour image le point A.
  Le nombre complexe $z_2=2+i$ a pour image le point B.
- Le point C a pour affixe le nombre complexe $z_3=3+2\cdot i$
  Le point D a pour affixe le nombre complexe $z_4=-i$.
  Le point E a pour affixe le nombre complexe $z_5=-2-i$.

Remarque :

- Un nombre réel a pour image un point de l'axe des abscisses.
  Réciproquement, tout point de l'axe des abscisses a pour affixe un nombre réel.
- Un nombre imaginaire pur a pour image un point de l'axe des ordonnées.
  Réciproquement, tout point de l'axe des ordonnées a pour affixe un nombre imaginaire pur.
- Deux nombres conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- Deux points symétriques relativement à l'origine du repère ont leurs affixes opposés.