

Session d'entraînement 2

A. Toutes séries :

Exercice 1

On part d'un entier n strictement positif :

- Si n est pair, on le transforme en $\frac{n}{2}$
- Si n est impair ($n > 1$), on le transforme en $3n+1$.
- Si $n=1$, on s'arrête.

Exemples :

- Si $n=6$, on obtient la suite :
 $6 \mapsto 3 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$
- Si $n=13$, on obtient la suite :
 $13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$

Il a été observé à l'aide d'un programme sur ordinateur, que pour chaque nombre testé, la suite aboutit toujours à 1. Mais ce résultat n'a pas été démontré à ce jour.

On peut par ailleurs, s'intéresser à la longueur de cette suite, qu'on notera $L(n)$.

Par exemple : $L(6)=9$ et $L(13)=10$.

- Déterminer $L(n)$ pour les entiers allant de 1 à 12.
- Soit p un entier, on considère l'entier $n=2^p$.
Exprimer $L(n)$ en fonction de p .
- Trouver un nombre n compris entre 2^{2008} et 2^{2009} tel que $L(n)=2012$.
Indication : On pourra chercher un nombre de la forme $2^p \times q$.
- Soit k un entier non nul.
 - Montrer que : $L(8k+4) = L(6k+4)+3$.
 - De même, montrer que : $L(8k+5)=L(6k+4)+3$.
 - Montrer que : $L(16k+2) = L(16k+3)$

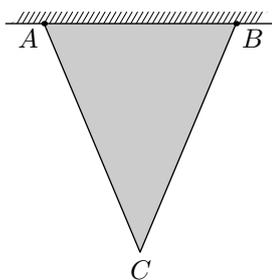
Exercice 2

Un fermier dispose d'un grand terrain le long d'un mur et d'un grillage. Le long de ce même mur, il veut réaliser un poulailler sous la forme d'un triangle isocèle de sommet C . Le grillage ne sera pas posé contre le mur.

Quelle est l'aire maximale du poulailler sachant que le grillage a une longueur de 88 m ?

(On pourra utiliser l'angle au sommet et le fait que

$$\sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{\sin(2\theta)}{2}$$

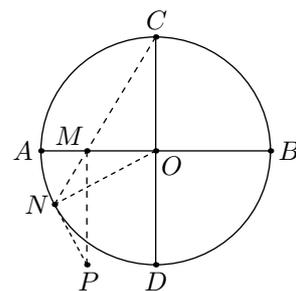


Exercice 3

On donne un cercle \mathcal{C} de centre O et deux diamètres perpendiculaires $[AB]$ et $[CD]$. M étant un point du segment $[AB]$, on trace (CM) qui recoupe le cercle en N .

La tangente en N au cercle et la perpendiculaire en M à (AB) se coupent en P . Montrer que :

$$OP = CM.$$



Exercice 4

On considère un triangle OAB équilatéral. On note R la mesure des côtés du triangle OAB .

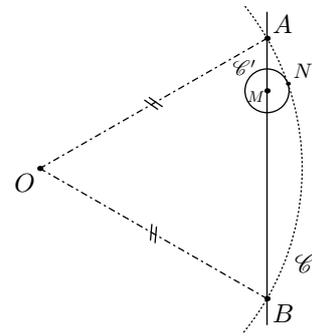
On note \mathcal{C} le cercle de centre O passant par le point A .

Soit x un nombre réel tel que $0 < x < \frac{R}{2}$. On place le point M sur le segment $[AB]$ vérifiant :

$$AM = x.$$

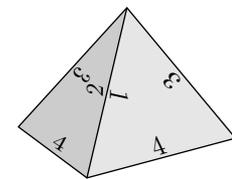
On considère le cercle \mathcal{C}' de centre M et tangent au cercle \mathcal{C} au point N .

Exprimer le rayon du cercle \mathcal{C} en fonction de R et de x .



Exercice 5

Un dé tétraédrique comporte quatre faces comme le dé représenté ci-contre. Lorsqu'on jette un tel dé, le résultat est le nombre inscrit au plus près de la base tétraèdre. Dans notre exemple, le dé tétraédrique est tombé sur la face 4.



Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jouent avec quatre dés tétraédriques réguliers et équilibrés mais qui ne sont pas numérotés de façon habituelle. Ainsi, le dé d'Antoine compte quatre faces numérotées 1, 6, 6 et 6. Avec ce dé, le nombre 1 est obtenu avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et le nombre

6 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

- Le dé de Baptiste est numéroté 4, 4, 5 et 5 ;
- celui de Cyril 3, 3, 3 et 8 ;
- et enfin, celui de Diane 2, 2, 7 et 7.

1. Chaque joueur jette ce dé tétraédrique une fois. Qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6 ?

2. Les joueurs commencent une série de duels : Antoine joue contre Baptiste, Baptiste joue contre Cyril, Cy-

ril joue contre Diane, Diane joue contre Antoine. Le gagnant de chaque duel est le joueur qui a obtenu le résultat le plus élevé.

- a. Montrer que dans le premier duel Antoine gagne contre Baptiste avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.
- b. Donner les probabilités de gain des joueurs dans les trois autres duels.

3. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jettent simultanément leur dé. Celui des quatre joueurs qui obtient le plus grand nombre gagne.

- a. Montrer que la probabilité que Baptiste gagne est égale à $\frac{3}{32}$.
- b. Qui a le plus de chances de gagner ce jeu ?

B. Toutes les séries autres que S :

Exercice 6

Une calculatrice défectueuse permet seulement :

- de taper des nombres positifs ou nuls ;
- de faire l'opération suivante : à partir de trois nombres entrés successivement $(x; y; z)$, elle affiche 0 si $x=y$ et le résultat de $\frac{z}{x-y}$ sinon.

$$(x; y; z) \longrightarrow \begin{cases} \frac{z}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

- l'utilisation des parenthèses qui permet de composer des calculs.

1. En détaillant les calculs, vérifier les résultats sui-

vants donnés par la calculatrice :

$$(0; 1; 2) \mapsto -2 \quad ; \quad ((2; 0; 1); 1; 1) \mapsto -2$$

2. Que donne $(2; 0; 1)$, $(0; 2; 1)$ et $((2; 1; (2; 1; 2)))$?
3. Donner un calcul permettant d'obtenir -1 .
4. Vérifier que le calcul $(a; 0; 1)$ permet d'obtenir l'inverse de a pour tout $a > 0$.
5. Proposer un calcul permettant de faire la division de deux nombres positifs : $\frac{a}{b}$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$.
6. Proposer un calcul permettant de faire la multiplication de deux nombres positifs : $a \times b$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

C. Série S :

Exercice 7

1. L , S et V étant trois nombres réels positifs, montrer que les triplets $(a; b; c)$ solutions du système :

$$\begin{cases} a + b + c = L \\ ab + ac + bc = S \\ abc = V \end{cases}$$

sont tels que a , b et c sont les solutions de l'équation :

$$X^3 - L \cdot X^2 + S \cdot X - V = 0$$

2. Déterminer les dimensions d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes ses arêtes est de 20 cm , la somme des aires des six faces est de 14 cm^2 et dont le volume est de 3 cm^3 .

3. Quels sont les volumes minimum et maximum d'un

pavé droit dont la somme des longueurs de toutes les arêtes est de 20 cm , la somme des aires des six faces est de 14 cm^2 .

Exercice 8

Cinq cercles de rayon 1 cm ont été placés dans un carré comme l'indique le dessin.

Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré.

Déterminer la longueur d'un côté du carré.

