Session d'entrainement 2

A. Toutes séries :

Correction 1

1. Voici les chaînes associées à tous les entiers allant de 1 à 12 :
    - $1 \longmapsto 1$
      On en déduit : $L(1)=1$
    - $2 \longmapsto 1$
      On en déduit : $L(2)=2$
    - $3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
      On en déduit : $L(2)=2L(3)=8$
    - $4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
      On en déduit : $L(2)=2L(4)=3$
    - $5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
      On en déduit : $L(2)=2L(5)=6$
    - $6 \longmapsto 3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
      On en déduit : $L(2)=2L(6)=9$
    - $7 \longmapsto 22 \longmapsto 11 \longmapsto 34 \longmapsto 17 \longmapsto 52 \longmapsto 26$
      $\longmapsto 13 \longmapsto 40 \longmapsto 20 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16$
      $\longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
      On en déduit que : $L(7)=17$
    - $8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
      On en déduit que : $L(8)=4$
    - $9 \longmapsto 28 \longmapsto 14 \longmapsto 7 \longmapsto 22 \longmapsto 11 \longmapsto 34 \longmapsto 17$
      $\longmapsto 52 \longmapsto 26 \longmapsto 13 \longmapsto 40 \longmapsto 20 \longmapsto 10 \longmapsto 5$
      $\longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
      On en déduit que : $L(9)=20$
    - $10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
      On en déduit que : $L(10)=7$
    - $11 \longmapsto 34 \longmapsto 17 \longmapsto 52 \longmapsto 26 \longmapsto 13 \longmapsto 40 \longmapsto 20$
      $\longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
      On en déduit que : $L(11)=15$
    - $12 \longmapsto 6 \longmapsto 3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4$
      $\longmapsto 2 \longmapsto 1$
      On en déduit que : $L(12)=10$

2. Voici la suite obtenue pour l'entier $n=2^p$:
   $2^p \longmapsto 2^{p-1} \longmapsto 2^{p-2} \longmapsto \cdots \longmapsto 2^2 \longmapsto 2^1 \longmapsto 2^0$

   Cette suite comporte $p+1$ termes : $L\big(2^p\big)=P+1$

3. En prenant un nombre de la forme $2^p \times q$:
   $$\underbrace{2^p \times q \longmapsto \cdots \longmapsto 2^1 \times q \longmapsto 2^0 \times q}_{p+1 \text{ termes}} = \underbrace{q \longmapsto \cdots \longmapsto 1}_{L(q) \text{ termes}}$$

   Ainsi, le nombre $2^p \times q$ définit un suite de longueur $p+L(q)$.

   Cherchons les entiers compris dans l'intervalle $I=\big[2^{2008}\,;2^{2009}\big]$ s'écrivant sous la forme $2^p \times q$:
    - On a :$2^{2008}=2\times 2^{2007}$ et $2^{2009}=4\times 2^{2007}$
      On en déduit que l'entier $2^{2007}\times 3$ appartient à l'intervalle I.
      Or : $L(2^{2007}\times 3)=2007+L(3)=2007+8=2015$.
      Ce n'est pas l'entier recherché.
    - On a : $2^{2008}=4\times 2^{2006}$ et $2^{2009}=8\times 2^{2006}$
      On en déduit que l'entier $2^{2006}\times 5$ appartient à l'intervalle I.
      Or : $L(2^{2006}\times 5)=2006+L(5)=2006+6=2012$.
      $2^{2006}\times 5$ est l'entier recherché.

4. a. Recherchons la suite formée par le nombre $8k+4$:
   $8k+4 \longmapsto 4k+2 \longmapsto 2k+1 \longmapsto 3(2k+1)+1=3k+4$
   On en déduit : $L(8k+4)=L(3k+4)+3$

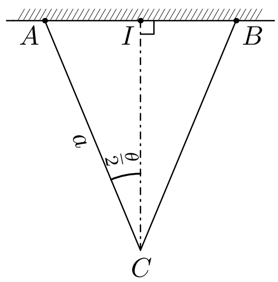
   b. Recherchons la suite formée par le nombre $8k+5$:
   $8k+5 \longmapsto 24k+16 \longmapsto 12k+8 \longmapsto 6k+4$
   On en déduit : $L(8k+5)=L(6k+4)$

   c. Etudions les suites définies par les deux entiers suivants :
    - $16k+2 \longmapsto 8k+1 \longmapsto 24k+4 \longmapsto 12k+2$
      $\longmapsto 6k+1 \longmapsto 18k+4 \longmapsto 9k+2$
    - $16k+3 \longmapsto 48k+10 \longmapsto 24k+5 \longmapsto 72k+16$
      $\longmapsto 36k+8 \longmapsto 18k+4 \longmapsto 9k+2$

   On remarque qu'en partant d'un des deux entiers, la longueur de la chaîne pour arriver jusqu'à l'entier $9k+2$ est de 7. On en déduit :
   $L(16k+2)=L(16k+3)$

Correction 2

Notons a la longueur AC et θ la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.



Dans le triangle AIC rectangle en I, on a les rapports trigonométriques suivants :

- $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{AI}{AC}$
  $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{AI}{a}$
  $AI=a\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}$
- $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{IC}{AC}$
  $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{IC}{a}$
  $IC=a\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}$

Le triangle ABC a pour aire :

$$\mathcal{A} = \frac{AB\times IC}{2} = \frac{2\times a\cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\times a\cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}$$
$$= a^2\cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

D'après la formule rappelée dans l'énoncé :
$$= a^2\cdot\frac{\sin\theta}{2}$$

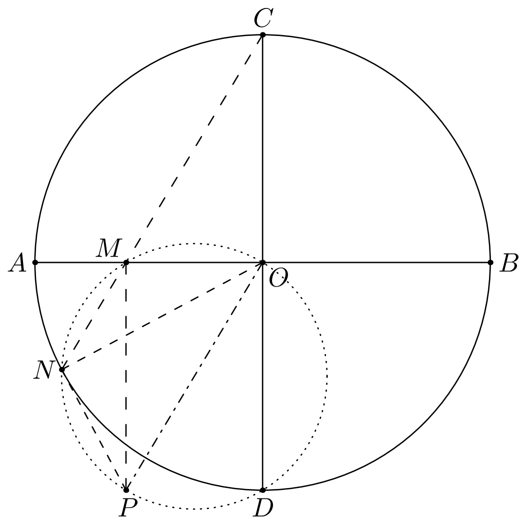
La cloture mesurant $88\,m$, on en déduit la relation sur les longueurs du triangle ABC :
$$AC + CB = 88$$
$$a + a = 88$$
$$2a = 88$$
$$a = 44\,m$$

Ainsi, l'aire du triangle ABC s'exprime seulement en fonction de θ :
$$\mathcal{A} = a^2\cdot\frac{\sin\theta}{2} = 44^2\times\frac{\sin\theta}{2}$$

On en déduit que l'aire du triangle ABC sera maximal lorsque le facteur $\sin\theta$ le sera également : la fonction sinus a pour valeur maximale 1 et ce maximum est atteint pour $x=\frac{\pi}{2}$.

Ainsi, le poulailler aura une aire maximal lorsqu'il formera un triangle isocèle rectangle. Son aire aura pour mesure :
$$\mathcal{A} = 44^2\times\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} = 44^2\times\frac{1}{2} = 968\,m^2$$

Correction 3



Notons $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre $[OP]$.

- Le triangle MOP est rectangle en M : le triangle MOP est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}'$;
- La droite (NP) est la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point de contact N, on en déduit que les droites (ON) et (NP) sont perpendiculaires.
  Le triangle ONP étant rectangle en N, on en déduit qu'il est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}'$

Ainsi, les angles $\widehat{NOP}$ et $\widehat{NMP}$ sont deux angles inscrits au cercle $\mathscr{C}'$ interceptant le même arc $\overset{\frown}{NP}$. On en déduit :
$$\widehat{NOP} = \widehat{NMP}$$

Les droites (MP) et (CD) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AB) : ces deux droites sont parallèles.
Les droites (MP) et (CD) sont parallèles et sont interceptées par une sécante (CN). Les deux angles $\widehat{NMP}$ et $\widehat{MCO}$ sont deux angles correspondants dans cette configuration. On en déduit :
$$\widehat{NMP} = \widehat{MCO}$$

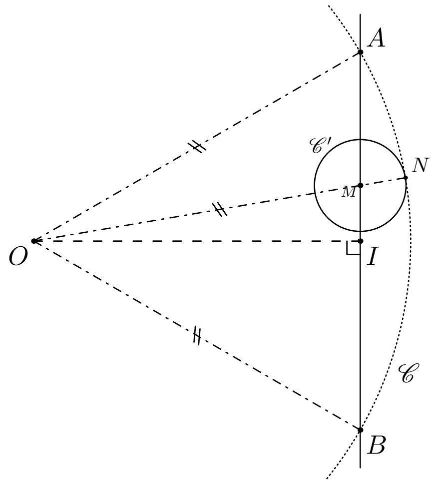
O est le centre du cercle $\mathscr{C}$: le triangle ONC est isocèle en A. On en déduit l'égalité des mesures des deux angles de la base principale :
$$\widehat{CNO} = \widehat{NCO}$$

On récapitule ici les égalités d'angles observées :
$$\widehat{NOP} = \widehat{NMP} = \widehat{MCO} = \widehat{NCO} = \widehat{CNO}$$
En particulier, on retient :
$$\widehat{NOP} = \widehat{CNO}$$

Considérons les deux droites (OP) et (NC) interceptées par la sécante (NO). Dans cette configuration, les deux angles $\widehat{NOP}$ et $\widehat{CNO}$ sont deux angles alternes-internes. De l'égalité de la mesure de ces deux angles, on en déduit que les droites (NC) et (OP) sont parallèles.

Les droites (NC) et (OP) sont parallèles et également les droites (MP) et $(CO$ sont parallèles : on en déduit que le quadrilatère $OCMP$ est un parallélogramme.
Les deux côtés $[OC]$ et $[MP]$ étant opposés dans le parallélogramme $OCMP$, on en déduit :
$$OP = CM$$

Correction 4



On note I le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OIA.

Le triangle ABO est un triangle équilatéral. Ainsi, on a :
$$AI = \frac{1}{2}\cdot R$$
Dans le triangle AIO rectangle en I, on a d'après le théorème de Pythagore :
$$OA^2 = OI^2 + IA^2$$
$$R^2 = OI^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$$
$$R^2 = OI^2 + \frac{R^2}{4}$$
$$OI^2 = R^2 - \frac{1}{4}\cdot R^2$$
$$OI^2 = \frac{3}{4}\cdot R^2$$
$$OI = \sqrt{\frac{3}{4}\cdot R^2}$$
$$OI = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R$$

Dans le triangle OIM est rectangle en I et d'après le théorème de Pythagore, on a :

$OM^2 = OI^2 + IM^2$

$OM^2 = \frac{3}{4}{\cdot}R^2 + \left(\frac{R}{2} - x\right)^2$

$OM^2 = \frac{3}{4}{\cdot}R^2 + \frac{R^2}{4} - 2{\times}\frac{R}{2}{\times}x - x^2$

$OM^2 = R^2 - R{\times}x - x^2$

$OM = \sqrt{R^2 - R{\times}x - x^2}$

N étant un point du cercle $\mathscr{C}$, on a : $ON = R$

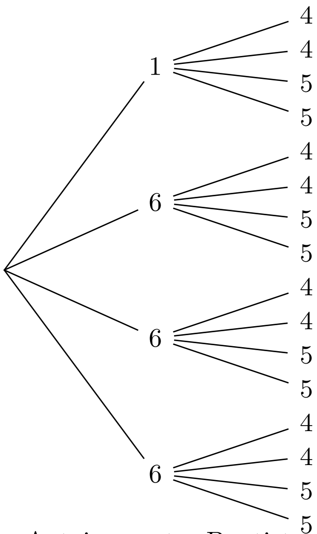
Ainsi, le rayon du cercle $\mathscr{C}'$, on a :

$MN = ON - OM = R - \sqrt{R^2 - R{\times}x - x^2}$

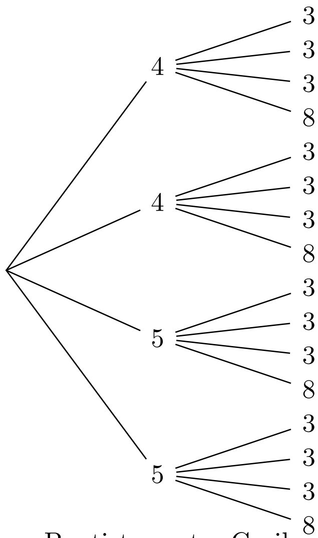
Correction 5

1.
- Le dé de Baptiste ne comporte aucun nombre supérieur ou égal à 6. La probabilité recherchée est 0.
- Pour antoine, la probabilité est de $\frac{3}{4}$.
- Pour Cyril, la probabilité est $\frac{1}{4}$.
- Pour Diane, la probabilité est $\frac{1}{2}$.

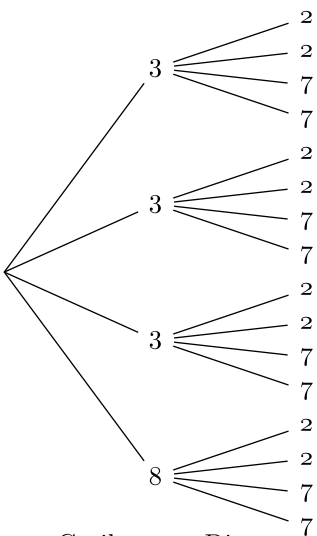
2. Voici les quatres duel observés :



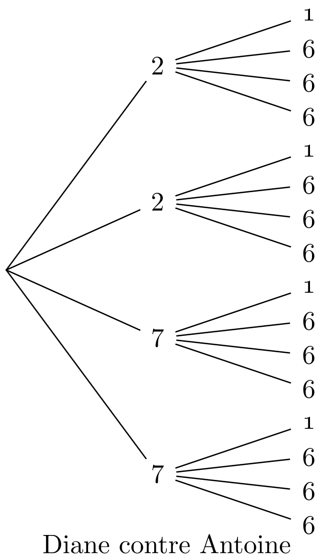
Antoine contre Baptiste



Baptiste contre Cyril



Cyril contre Diane



Diane contre Antoine

a. L'arbre de choix présenté précédemment montre qu'Antoine gagne 12 fois sur 16 contre Baptiste.
Antoine gagne Baptiste avec une probabilité de :
$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

b.
- Baptiste gagne contre Cyril avec une probabilité de :
$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$
- Cyril gagne contre Diane avec une probabilité de :
$\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$
- Diane gange contre Antoine avec une probabilité de :
$\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

3. On note a, b, c, d les nombres obtenues respectivement par Antoine, Baptiste, Cyril et Diane. On considère les quadruplets $(a\,;b\,;c\,;d)$ représentant chaque expérimentation du jeu.

a. Voici les quadruplets permettant à Baptiste de gagner :
- $(1\,;4\,;3\,;2)$: il apparaitra 12 fois dans l'arbre de choix présentant les 256 possibilités.
- $(1\,;5\,;3\,;2)$: il apparaitra 12 fois.

Ainsi, Baptiste gagnera avec une probabilité :
$\frac{24}{256} = \frac{3}{32}$

b.
- Voici les quadruplets permettant à Antoine de gagner :
  - $(6\,;4\,;3\,;2)$: il apparait 36 fois ;
  - $(6\,;5\,;3\,;2)$: il appartait 36 fois.

  Ainsi, Antoine à pour probabilité de gagner :
  $\frac{36+36}{256} = \frac{72}{256} = \frac{9}{32}$
- Voici les quadruplets permettant à Diane de gagner :
  - $(1\,;4\,;3\,;7)$: il apparait 12 fois ;
  - $(6\,;4\,;3\,;7)$: il apparait 36 fois ;
  - $(1\,;5\,;3\,;7)$: il apparait 12 fois ;
  - $(6\,;5\,;3\,;7)$: il apparait 36 fois.

  Ainsi, Diane peut gagner avec une probabilité de :
  $\frac{12+36+12+36}{256} = \frac{96}{256} = \frac{3}{8}$
- Cyril a pour probabilité de gagner :
$1 - \left(\frac{24}{256} + \frac{72}{256} + \frac{96}{256}\right) = 1 - \frac{192}{256} = \frac{64}{256} = \frac{1}{4}$

B. Toutes les séries autres que S :

Exercice 1

1. - Dans le triplet $(0;1;2)$, les valeurs de x et y sont distinctes. Ainsi, on a :
$(0;1;2) \longrightarrow \dfrac{2}{0-1} = \dfrac{2}{-1} = -1$
   - Dans le triplet $(2;0;1)$, les valeurs de x et de y sont distinctes. Ainsi, on a :
$(2;0;1) \longrightarrow \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$

   Ainsi, on obtient le nouveau triplet $\left(\dfrac{1}{2};1;1\right)$ où les valeurs de x et de y sont distinctes :
$\left(\dfrac{1}{2};1;1\right) \longrightarrow \dfrac{1}{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

   On obtient le résultat :
$\big((2;0;1)\ ;1;1\big) \longmapsto -2$

2. On a les résultats suivants :
   - $(2;0;1) \longmapsto \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$
   - $(0;2;1) \longmapsto \dfrac{1}{0-2} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$
   - $(2;1;2) \longmapsto \dfrac{2}{2-1} = \dfrac{2}{1} = 2$

   On en déduit :
$\big(2;1;\ (2;1;2)\big) \longmapsto (2;1)2 = \dfrac{2}{2-1} = \dfrac{2}{1} = 2$

3. Le triplet $(1;2;1)$ a pour image :
$(1;2;1) \longmapsto \dfrac{1}{1-2} = \dfrac{1}{-1} = -1$

4. Si $a>0$, on a le calcul :
$(a;0;1) \longmapsto \dfrac{1}{a-0} = \dfrac{1}{a}$

5. Avec $b>0$, considérons le triplet $(b;0;a)$ a pour image :
$(b;0;a) \longmapsto \dfrac{a}{b-0} = \dfrac{a}{b}$

6. Considérons la séquence :
$\big((b;0;1)\ ;0;a\big)$

   D'après la question 4., le triplet $(b;0;1)$ donne la valeur :
$(b;0;1) \longmapsto \dfrac{1}{b}$

   Ainsi, on a l'association :
$\big((b;0;1)\ ;0;a\big) \longmapsto \left(\dfrac{1}{b};0;a\right)$

   D'après la question 5., on a :
$\left(\dfrac{1}{b};0;a\right) \longmapsto \dfrac{a}{\frac{1}{b}} = a\times b$

C. Série S :

Exercice 2

1. Notons (E) l'équation :
$(E):\ X^3 - L\cdot X^2 + S\cdot X - V = 0$
   - Montrons que a est solution de (E) :
$a^3 - L\cdot a^2 + S\cdot a - V$
$= a^3 - (a+b+c)\cdot a^2 + (ab+ac+bc)\cdot a - abc$
$= a^3 - a^3 - a^2b + a^2c + a^2b + a^2c + abc - abc = 0$
a est un solution de (E).
   - Montrons que a est solution de (E) :
$b^3 - L\cdot b^2 + S\cdot b - V$
$= b^3 - (a+b+c)\cdot b^2 + (ab+ac+bc)\cdot b - abc$
$= b^3 - ab^2 - b^3 - b^2c + ab^2 + abc + b^2c - abc = 0$
b est un solution de (E).
   - Montrons que a est solution de (E) :
$c^3 - L\cdot c^2 + S\cdot c - V$
$= c^3 - (a+b+c)\cdot c^2 + (ab+ac+bc)\cdot c - abc$
$= c^3 - ac^2 - bc^2 - c^3 + abc + ac^2 + bc^2 - abc = 0$
c est un solution de (E).

2. Notons a, b et c les trois dimensions de ce pavé droit. Traduisons les caractéristiques du pavé droit en fonction des réels a, b et c :
   - La longueur de toutes ses arêtes est de $20\,cm$:
$4\times a + 4\times b + 4\times c = 20$
$a + b + c = 5$
   - La somme des aires des six faces est de $14\,cm^3$:
$2\times ab + 2\times ac + 2\times bc = 14$
$ab + ac + bc = 7$
   - Le volume du pavé droit est de $3\,cm^3$:
$a\times b\times c = 3$

   Ainsi, les réels a, b et c sont solutions du système :
$$\begin{cases} a+b+c = 5 \\ ab+ac+bc = 7 \\ abc = 3 \end{cases}$$

   Ainsi, ces réels sont solutions du polynômes :
$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$

   En remarquant que $x{=}1$ est solution de ce polynôme, on obtient la factorisation suivante :
$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)\big(\alpha\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma\big)$

   Par comparaisons des termes de degrés 2 et 0
$= (x-1)\big(x^2 + \beta\cdot x + 3\big)$

   Développons l'expression obtenue :
$(x-1)\big(x^2+\beta\cdot x+3\big) = x^3 + \beta\cdot x^2 + 3x - x^2 - \beta\cdot x - 3$
$= x^3 + \big(\beta-1\big)\cdot x^2 + \big(3-\beta\big)x - 3$

   Le nombre β doit être solution du système :
$$\begin{cases} \beta - 1 = -5 \\ 3 - \beta = 7 \end{cases}$$

   On se rend compte que $\beta{=}-4$. On obtient la factorisation :
$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)\big(x^2 - 4x + 3\big)$

   Le second facteur est un polynôme du second degré admettant pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-4)^2 - 4\times1\times3 = 16 - 12 = 4$

   On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

   Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-2}{2\times 1} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+2}{2\times 1} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

On obtient la factorisation suivante :

$$x^3-5x^2+7x-3 = (x-1)\big(x^2-4x+3\big)$$
$$= (x-1)(x-1)(x-3)$$

D'après la question **1.**, le pavé droit a pour dimensions $3\times 1\times 1$

3. En reprenant des raisonnements de la question **2.**, on montre que les dimensions d'un tel pavé droit sont les solutions de l'équation :

$$x^3-5x^2+7x-V=0 \quad \text{où } V \text{ est le volume du pavé droit}$$
$$x^3-5x^2+7x=V \quad \text{où } V \text{ est le volume du pavé droit}$$

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = x^3-5x^2+7x$$

En notant, a , b et c les trois dimensions du pavé droit, on a :

$$f(a)=V \quad ; \quad f(b)=V \quad ; \quad f(c)=V.$$

Du fait que la longueur des arêtes mesurent $20\,cm$, on en déduit que toutes les dimensions de ce pavé droit vérifient :

$$0\leqslant a\leqslant 5 \quad ; \quad 0\leqslant b\leqslant 5 \quad ; \quad 0\leqslant c\leqslant 5$$

Etudions les variations de la fontion f sur l'intervalle $\big[0\,;5\big]$. Pour cela, la fonction f admet pour dérivée :

$$f'(x) = 3x^2-10x+7$$

Le polynôme définissant l'expression de f' admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-10)^2-4\times 3\times 7 = 100-84 = 16$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-10)-4}{2\times 3} = \frac{10-4}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-10)+4}{2\times 3} = \frac{10+4}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

On obtient le tableau de signe suivant de la fonction f' :

x	$-\infty$		1		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, on a le tableau de variation :

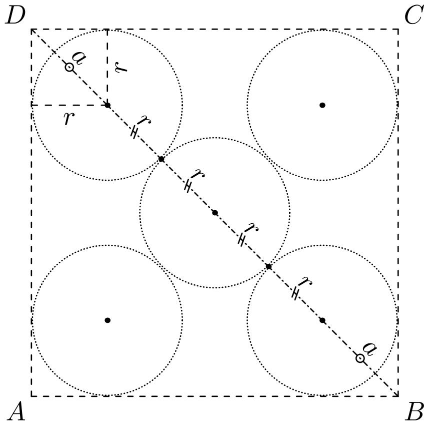
x	0		1		$\frac{7}{3}$		5
Variation de f	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{49}{27}$	$\nearrow$	35

Etudions le nombre de solution de l'équation $f(x)=V$ en fonction de la valeur de V, d'après le tableau de variation et vérifions si les solutions obtenues vérifient les conditions imposées au pavé droit :

- Pour $V\in\Big[0\,;\frac{49}{27}\Big[$: l'équation possèdent une seule solution qui sera comprise entre $\big[0\,;1\big[$. Les trois longueurs a, b, c doivent être toutes égales et inférieures à 1.
  Ainsi, la somme des longueurs ne vérifiera pas la condition imposée :
  $$a<1$$
  $$a+b+c<3\times 1$$
  $$4\times\big(a+b+c\big)<12$$
  $$L<12$$
  Ce qui est absurde d'après les conditions imposées par le pavé droit.
- Pour $V\in\big]3\,;35\big[$: l'équation possèdent une seule solution qui appartiendra à l'intervalle $\Big]\frac{7}{3}\,;5\Big]$. Les trois longueurs a, b, c doivent être toutes égales et sont supérieures à $\frac{7}{3}$:
  $$a>\frac{7}{3}$$
  $$a+b+c>3\times\frac{7}{3}$$
  $$4(a+b+c)>28$$
  $$L>28$$
  Ce qui est absurde d'après les conditions imposées par le pavé droit.
- Pour $V\in\Big[\frac{49}{27}\,;3\Big]$, l'équation $f(x)=V$ a deux ou trois solutions suivants les cas. Deux cas trivaux vérifient ces deux valeurs extrèmes du volume :
  - Le cube de dimension $a=1$, $b=1$ et $c=3$ vérifient :
    $$L=20\,cm \quad ; \quad S=14\,cm^2 \quad ; \quad V=3\,cm^3$$
  - Le cube de dimension $a=\frac{7}{3}$, $b=\frac{7}{3}$ et $c=\frac{1}{3}$ vérifient :
    $$L=20\,cm \quad ; \quad S=14\,cm^2 \quad ; \quad V=\frac{49}{27}$$

Ainsi, on vient de montrer que le volume d'un tel cube était minorée par 3 et majorée par $\frac{49}{27}$.

Exercice 3



La diagonale du carré a pour mesure :

$BD = 2a + 4r$

où a est la diagonale d'un petit carré de côté r. Par le théorème de Pythagore, la longueur a vérifie :

$$a^2 = r^2 + r^2$$
$$a^2 = 2{\cdot}r^2$$
$$\sqrt{a^2} = \sqrt{r^2{\times}2}$$
$$a = \sqrt{r^2}{\times}\sqrt{2}$$
$$a = r{\cdot}\sqrt{2}$$

Ainsi, on a : $AC = 2\sqrt{2}+4$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$
$$\big(2\sqrt{2}+4\big)^2 = 2{\cdot}BC^2$$
$$\big[2{\cdot}(\sqrt{2}+2)\big]^2 = 2{\cdot}BC^2$$
$$2^2{\cdot}(\sqrt{2}+2)^2 = 2{\cdot}BC^2$$
$$4{\cdot}(\sqrt{2}+2)^2 = 2{\cdot}BC^2$$
$$2{\cdot}(\sqrt{2}+2)^2 = BC^2$$
$$BC = \sqrt{2{\cdot}(\sqrt{2}+2)^2}$$
$$BC = \sqrt{2}{\cdot}(\sqrt{2}+2)$$
$$BC = \big(\sqrt{2}\big)^2 + 2\sqrt{2}$$
$$BC = 2 + 2\sqrt{2}$$