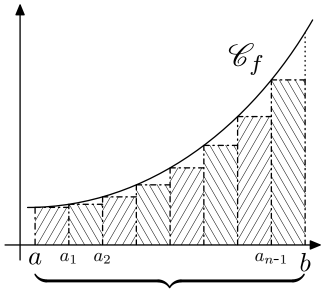
Autour des aires

Dans le plan muni d'un repère orthonormé :



On considère la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f strictement positive et croissante sur son ensemble de définition.

Sur l'intervalle $[a\,;b]$, on place, entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$, n rectangles de même largeur comme représenté ci-contre.

Algorithme 1

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  som EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  som PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE n
  POUR i ALLANT_DE 0 A ...
  DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR a+i*(b-a)/n
    som PREND_LA_VALEUR ...
  FIN_POUR
  AFFICHE som
FIN_ALGORITHME
```

Partie A : étude de la configuration

1. En fonction des valeurs de a et b, donner la valeur du nombre a_1 représenté sur l'axe des abscisses. Faire de même pour a_2, a_3.

2. Donner une expression, en fonction de a et b, du rectangle placé sur l'intervalle $[a_1\,;a_2]$. Faire de même pour celui situé au dessus de $[a_2\,;a_3]$.

Partie B : modélisation par un algorithme

3. Dans Algobox, définir la fonction numérique $F1$ comme étant la fonction carré. L'algorithme **1** doit mesurer l'aire du domaine formé par tous les rectangles. Compléter correctement les pointillés.

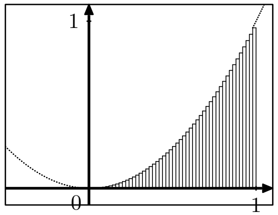
4. Dans cette question, on prend a=0 et b=1. Voici un tableau de valeurs, arrondies au millième, retourné par l'algorithme lorsqu'on fait varier n.

n	10	100	500	1 000	5 000
$\mathcal{A}_n$	0,285	0,3284	0,332	0,3328	0,3332

Conjecturer la valeur de convergence de la suite $(\mathcal{A}_n)$.

Partie C : étude théorique

On considère la fonction carré, et on effectue la construction des rectangles sur l'intervalle $[0\,;1]$. La figure ci-contre présente la construction pour $n=50$. On admet que l'aire $\mathcal{A}_n$ formée par les n rectangles est donnée par : $\mathcal{A}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n}$

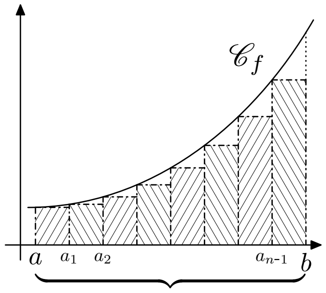


5. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$: $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$

6. Justifier que : $\mathcal{A}_n = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6n^3}$. En déduire la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \mathcal{A}_n = \frac{1}{3}$.

Autour des aires

Dans le plan muni d'un repère orthonormé :



On considère la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f strictement positive et croissante sur son ensemble de définition.

Sur l'intervalle $[a\,;b]$, on place, entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$, n rectangles de même largeur comme représenté ci-contre.

Algorithme 1

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  som EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  som PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE n
  POUR i ALLANT_DE 0 A ...
  DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR a+i*(b-a)/n
    som PREND_LA_VALEUR ...
  FIN_POUR
  AFFICHE som
FIN_ALGORITHME
```

Partie A : étude de la configuration

1. En fonction des valeurs de a et b, donner la valeur du nombre a_1 représenté sur l'axe des abscisses. Faire de même pour a_2, a_3.

2. Donner une expression, en fonction de a et b, du rectangle placé sur l'intervalle $[a_1\,;a_2]$. Faire de même pour celui situé au dessus de $[a_2\,;a_3]$.

Partie B : modélisation par un algorithme

3. Dans Algobox, définir la fonction numérique $F1$ comme étant la fonction carré. L'algorithme **1** doit mesurer l'aire du domaine formé par tous les rectangles. Compléter correctement les pointillés.

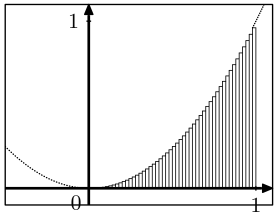
4. Dans cette question, on prend a=0 et b=1. Voici un tableau de valeurs, arrondies au millième, retourné par l'algorithme lorsqu'on fait varier n.

n	10	100	500	1 000	5 000
$\mathcal{A}_n$	0,285	0,3284	0,332	0,3328	0,3332

Conjecturer la valeur de convergence de la suite $(\mathcal{A}_n)$.

Partie C : étude théorique

On considère la fonction carré, et on effectue la construction des rectangles sur l'intervalle $[0\,;1]$. La figure ci-contre présente la construction pour $n=50$. On admet que l'aire $\mathcal{A}_n$ formée par les n rectangles est donnée par : $\mathcal{A}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n}$



5. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$: $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$

6. Justifier que : $\mathcal{A}_n = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6n^3}$. En déduire la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \mathcal{A}_n = \frac{1}{3}$.