Proposition :

Soit f et g deux fonctions telles que f soit définie sur I et g définie sur $f(I)$.
On note a, b c des nombres réels et/ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \left.\begin{array}{l} \lim_{x\mapsto a} f(x) = b \\ \lim_{x\mapsto b} g(x) = c \end{array}\right\} \implies \lim_{x\mapsto a} \big(g\circ f\big)(x) = c$$

Preuve :

La démonstration proposée ci-dessous se limite au cas où a, b et c sont des nombres réels. Les autres cas doivent s'étudier un par un dans une démarche analogue à celle-ci dessous :
On rappelle la définition de la convergence d'une fonction f vers b lorsque x tend vers a :

On dit que la fonction f converge vers b lorsque x tend vers a si pour tout intervalle J ouvert contenant b, il existe un intervalle I ouvert contenant a tel que tout image de I appartient à l'intervalle de J.

On traduit cette définition par :

$$\big(\forall J \text{ ouvert}, b\in J\big)\big(\exists I \text{ ouvert}, a\in I\big)\big(x\in I \Longrightarrow f(x)\in J\big)$$

Début de la démonstration :
Prenons un intervalle quelconque ouvert K contenant c :

- D'après la convergence de la fonction g en c lorsque x tend vers b, il existe un intervalle J ouvert contenant b tel que :
  $x\in J \implies g(x)\in K$
- D'après la convergence de la fonction f en b lorsque x tend vers a, il existe un intervalle I ouvert contenant a tel que :
  $x\in I \implies f(x)\in J$

Donc, pour tout $x\in I$, on a : $\big(g\circ f\big)(x)\in K$.
Ainsi, pour tout intervalle K ouvert contenant c, il existe un intervalle I contenant a tel que pour tout $x\in I$, on a $\big(g\circ f\big)(x)\in K$
Par définition, on a la définition : $\lim_{x\mapsto a} \big(g\circ f\big)(x) = c$

Proposition :

Soit f et g deux fonctions telles que f soit définie sur I et g définie sur $f(I)$.
On note a, b c des nombres réels et/ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \left.\begin{array}{l} \lim_{x\mapsto a} f(x) = b \\ \lim_{x\mapsto b} g(x) = c \end{array}\right\} \implies \lim_{x\mapsto a} \big(g\circ f\big)(x) = c$$

Preuve :

La démonstration proposée ci-dessous se limite au cas où a, b et c sont des nombres réels. Les autres cas doivent s'étudier un par un dans une démarche analogue à celle-ci dessous :
On rappelle la définition de la convergence d'une fonction f vers b lorsque x tend vers a :

On dit que la fonction f converge vers b lorsque x tend vers a si pour tout intervalle J ouvert contenant b, il existe un intervalle I ouvert contenant a tel que tout image de I appartient à l'intervalle de J.

On traduit cette définition par :

$$\big(\forall J \text{ ouvert}, b\in J\big)\big(\exists I \text{ ouvert}, a\in I\big)\big(x\in I \Longrightarrow f(x)\in J\big)$$

Début de la démonstration :
Prenons un intervalle quelconque ouvert K contenant c :

- D'après la convergence de la fonction g en c lorsque x tend vers b, il existe un intervalle J ouvert contenant b tel que :
  $x\in J \implies g(x)\in K$
- D'après la convergence de la fonction f en b lorsque x tend vers a, il existe un intervalle I ouvert contenant a tel que :
  $x\in I \implies f(x)\in J$

Donc, pour tout $x\in I$, on a : $\big(g\circ f\big)(x)\in K$.
Ainsi, pour tout intervalle K ouvert contenant c, il existe un intervalle I contenant a tel que pour tout $x\in I$, on a $\big(g\circ f\big)(x)\in K$
Par définition, on a la définition : $\lim_{x\mapsto a} \big(g\circ f\big)(x) = c$

