Entrainement au concours Olympiade

A. Pour toutes les séries :

Correction 1 *(Extrait du sujet national 2012)*

1. a. La somme des chiffres de 364 faut :
   $3+6+4=13$
   Le nombre 364 est divisible par 13 :
   $364=28\times13+0$
   On en déduit que 364 est un nombre de Harshad.

   b. Tous les nombres sont divisibles par eux-mêmes et un nombre s'écrivant à un chiffre est égal à la somme de ses chiffres ; les nombres suivants sont des nombres de Harshad :
   $1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9$
   Le nombre 10 a sa somme des chiffres qui vaut 1 : c'est un nombre de Harshad.
   Le nombre 11 a sa somme des chiffres qui vaut 2 et 2 est divisible par 11 : ce n'est pas un nombre de Harshad.

2. a. La somme des chiffres du nombre 1000 vaut 1 et 1000 est divisible par 1 : 1000 est un nombre d'Harshad.

   b. Pour tout entier naturel 10^n a sa somme des chiffres qui vaut 1 et 1 divisant tout nombre, on en déduit que 10^n est un nombre de Harshad.

Correction 2 *(Extrait du sujet académique d'Amiens)*

1. La division euclidienne de 15 par 7 donne :
   $15=2\times7+1$
   Ainsi, en faisant tourner de 15 crans la roue R_0 :
   - La roue R_0 a fait 2 tours complets puis aura tourner d'un cran ; La roue R_0 indiquera le numéro 1 ;
   - Les deux tours complets de R_0 fairont avancer de deux crans la roue R_1. La roue R_1 indiquera le numéro 2 ;
   - La roue R_1 n'ayant effectué aucun tour complet, la roue R_2 ne tournera d'aucun cran : elle indiquera 0

   Ainsi, le numéro affiché sera 120.

2. La division euclidienne de 100 par 7 donne :
   $100=14\times7+2$
   Ainsi, en faisant tourner de 100 crans la roue R_0 :
   - La roue R_0 effectuera 14 tours complets et 2 crans supplémentaires ; la roue indiquera le numéro 2 ;
   - La route R_0 effectuant 14 tours complets, on en déduit que la roue R_1 avancera de 14 crans correspondant à deux tours complets : elle affichera le numéro 0.
   - Les deux tours complets de la roue R_1 fairont avancer la roue R_2 de deux crans : le numéro affiché par la roue R_2 est 2.

   Ainsi, le numéro affiché sera 202.

3. Pour que la roue affiche la première fois le numéro 5 :
   - Il faut que la roue R_2 ait avancé de 5 crans ;
   - Pour que la roue R_2 ait avancé de 5 crans, il faut que la roue R_1 ait fait 5 tours complets : cela signifie que la roue R_1 a besoin d'avoir avancé de :
     $5\times7=35$ crans
   - Pour que la roue R_1 ait avancé de 35 crans, il faut que la roue R_0 ait fait 35 tours complets : cela correspond à :
     $35\times7=245$ crans.

   Pour que la roue R_2 affiche la première fois le numéro 5, il est nécessaire que la roue R_0 ait été avancée de 245 crans.

4. En suivant le raisonnement précédent :
   - La roue R_2 a fait un tour complet donc elle a avancé de 7 crans
   - La roue R_1 doit avoir fait 7 tours complets, correspondant à :
     $7\times7=49$ crans
   - La roue R_0 doit avoir fait 49 tours complets, correspondant à :
     $49\times7=343$ crans

5. La division euclidienne de 3580 par 7 donne :
   $3580=511\times7+3$
   La division euclidienne de 511 par 7 donne :
   $511=73\times7+0$
   La division euclidienne de 73 par 7 donne :
   $73=10\times7+3$
   Des informations précédentes, on en déduit qu'en faisant avancer de 3580 crans la roue R_0 :
   - La roue R_0 effectuera 511 tours complets et tournera de 3 crans supplémentaires : elle affichera le numéro 3 ;
   - La roue R_1 effectuera 73 tours complets : elle affichera le numéro 0 ;
   - La roue R_2 effectuera 10 tours complets et tournera de 3 crans supplémentaires : elle affichera le numéro 3.

   Ainsi, le compteur affichera 303.

Correction 3 *(Extrait du sujet académique de l'AEFE - Amérique)*

Durant toute la correction, on notera :
$x=DF\quad;\quad y=HC$

1. Le partage équitable de la croûte en trois parts égale donne, dans ce cas particulier, la relation :
   $DA=AG=AB=1$
   On en déduit que la longueur du rectangle a pour mesure :
   $AB=AG+GB=1+1+2$
   Ainsi, le rectangle $ABCD$ a pour aire : $L\times\ell=2$
   Ainsi, chaque part de pizza doit avoir une aire de $\dfrac{2}{3}$.
   - L'aire du triangle ADF doit vérifier :
   $$\mathcal{A}_{ADF}=\frac{2}{3}$$
   $$\frac{DA\times DF}{2}=\frac{2}{3}$$
   $$\frac{x}{2}=\frac{2}{3}$$
   $$3x=4$$
   $$x=\frac{4}{3}$$
   - L'aire du trapèze $GBCH$ doit vérifier :
   $$\mathcal{A}_{GBCH}=\frac{2}{3}$$
   $$\frac{(y+1)\times1}{2}=\frac{2}{3}$$
   $$y+1=\frac{4}{3}$$
   $$y=\frac{4}{3}-1$$
   $$y=\frac{1}{3}$$

 (cc) BY-NC

Ainsi, on a les longueurs :
$DF=\dfrac{4}{3}$; $HC=\dfrac{1}{3}$; $FH=2-\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

2. a. **Situation 1 :**
Si $L>2$ alors $L+\ell>3$; ceci indique, conformémemnt à la représentation de l'énoncé que les deux points de partage, E et G, de la courbe se retrouvent sur le segment $[AB]$.

Le partage équitable de la courbe donne les égalités :
$$\begin{cases} EG=GB=\dfrac{L+\ell}{3}=\dfrac{L+1}{3} \\ AE=\dfrac{L+\ell}{3}-1=\dfrac{L+\ell-3}{3}=\dfrac{L+1-3}{3}=\dfrac{L-2}{3} \end{cases}$$
L'aire totale du rectangle est :
$\mathcal{A}=AB\times AD=1\times L=L$.

Le partage équitable de l'aire en trois parts égales donne les conditions suivantes :

- Pour le trapèze $AEFD$:
$$\mathcal{A}_{AEFD}=\dfrac{L}{3}$$
$$\dfrac{(DF+AE)\times DA}{2}=\dfrac{L}{3}$$
$$\dfrac{\left(x+\dfrac{L-2}{3}\right)\times 1}{2}=\dfrac{L}{3}$$
$$x+\dfrac{L-2}{3}=\dfrac{2L}{3}$$
$$x=\dfrac{2L}{3}-\dfrac{L-2}{3}$$
$$x=\dfrac{2L-L+2}{3}$$
$$x=\dfrac{L+2}{3}$$

- Pour le trapèze $GBCH$:
$$\mathcal{A}_{GBCH}=\dfrac{L}{3}$$
$$\dfrac{(GB+HC)\times CB}{2}=\dfrac{L}{3}$$
$$\dfrac{\left(\dfrac{L+1}{3}+y\right)\times 1}{2}=\dfrac{L}{3}$$
$$\dfrac{L+1}{3}+y=\dfrac{2L}{3}$$
$$\dfrac{L+1}{3}+y=\dfrac{2L}{3}$$
$$\dfrac{L+1+3y}{3}=\dfrac{2L}{3}$$
$$L+1+3y=2L$$
$$3y=2L-L-1$$
$$3y=L-1$$
$$y=\dfrac{L-1}{3}$$

On en déduit les longueurs :
$EG=\dfrac{L+1}{3}$; $GB=\dfrac{L+1}{3}$
$DF=\dfrac{L+2}{3}$; $HC=\dfrac{L-1}{3}$

c. **Situation 2 :**
La longueur totale de la croûte est de $L+1$. De la condition $L<1$, on en déduit :
$$L<2$$
$$L+1<3$$
$$\dfrac{L+1}{3}<\dfrac{3}{3}$$
$$\dfrac{L+1}{3}<1$$
Cette donnée justifie que le point A est, dans cette situation, un point du segment $[DE]$.

Celle-ci doit être partagée équitablement en 3 parties. On en déduit les mesures suivantes :
$DE=\dfrac{L+1}{3}$; $GB=\dfrac{L+1}{3}$

L'aire totale du rectangle $ABCD$ est de :
$\mathcal{A}=L\times\ell=L\times 1=L$

Sachant que les trois parties de cette pizza doivent se partager équitablement son aire totale, étudions les aires de quelques élèments de cette figure :

- Pour le triangle DEF :
$$\mathcal{A}_{DEF}=\dfrac{L}{3}$$
$$\dfrac{DE\times DF}{2}=\dfrac{L}{3}$$
$$\dfrac{\dfrac{L+1}{3}\times x}{2}=\dfrac{L}{3}$$
$$\dfrac{L+1}{3}\times x=\dfrac{2L}{3}$$
$$(L+1)\times x=2L$$
$$x=\dfrac{2L}{L+1}$$

- Pour le trapèze $GBCH$:
$$\mathcal{A}_{GBCH}=\dfrac{L}{3}$$
$$\dfrac{(GB+HC)\times CB}{2}=\dfrac{L}{3}$$
$$\dfrac{\left(\dfrac{L+1}{3}+y\right)\times 1}{2}=\dfrac{L}{3}$$
$$\dfrac{L+1}{3}+y=\dfrac{2L}{3}$$
$$y=\dfrac{2L}{3}-\dfrac{L+1}{3}$$
$$y=\dfrac{L-1}{3}$$

On en déduit les longueurs :
$DE=\dfrac{L+1}{3}$; $GB=\dfrac{L+1}{3}$
$DF=\dfrac{2L}{L+1}$; $HC=\dfrac{L-1}{3}$

B. Séries autre que S :

Correction 4 *(Sujet académiques d'Aix-Marseille)*

1. a. L'écart entre les deux nombres 12 589 et 12 705 a pour valeur :
12 589 − 12 705 = 116
La division euclidienne de 116 par 29 donne :
$116=4\times 29+0$
Ainsi, on peut passer de 12 589 à 12 705 en ajoutant exactement 4 fois le nombre 29.

b. L'écart entre les deux nombres 1 485 et 310 190 a pour valeur :
310 190 − 1 485 = 308 705
La division euclidienne de 308 705 par 29 donne la relation :
$308\,705=10\,645\times 29+0$
On en déduit qu'on se peut se déplacer du nombre 1 485 au nombre 310 190 en comptant de 29 en 29.

2. La division euclidienne de 2013 par 29 donne la relation :
$2013=69\times 29+12$

Ainsi, en choisissant le nombre 12, l'écart entre ce nombre et 2 013 est de :
$2\,013-12=2\,001$
Et cet écart est un multiple de 29 :
$2\,013-12=69\times 29$

On en déduit que le plus petit entier naturel à partir duquel il est possible d'atteindre 2 013 en comptant de 29 en 29 est l'entier 12.

3. Supposons qu'il existe un entier n inférieur à 2 013 tel que :
- Il soit possible en partant de n d'atteindre 2 013 en comptant de 29 en 29.
C'est-à-dire qu'on a l'existence d'un entier naturel k vérifiant la relation :
$2\,013=n+29\times k$
- Il soit possible en partant de n d'atteindre 2 013 en comptant de 31 en 31.
C'est-à-dire qu'on a l'existence d'un entier naturel k'

 BY-NC

vérifiant la relation :
$2\,013 = n + 31 \times k'$

Ainsi, les entiers k et k' doivent vérifier la relation :

$$n + 29 \times k = n + 31 \times k'$$
$$29 \times k = 31 \times k'$$

D'après le produit en croix :

$$\frac{29}{31} = \frac{k'}{k}$$

Les nombres 29 et 31 étant deux nombres premiers, on en déduit que la fraction $\frac{29}{31}$ est une fraction irréductible.
Ainsi, il existe un nombre entier ℓ vérifiant les deux relations :
$29 = k' \div \ell \quad ; \quad 31 = k \div \ell$

Etudions les différentes valeurs possibles de ℓ :

- Pour $\ell = 1$:
  On a : $31 = k \div \ell \implies k = 31$
  De l'égalité :
  $$2\,013 = n + 29 \times k$$
  $$2\,013 = n + 29 \times 31$$
  $$n = 2\,013 - 899$$
  $$n = 1\,114$$
- Pour $\ell = 2$:
  On a : $31 = k \div \ell \implies k = 62$
  De l'égalité :
  $$2\,013 = n + 29 \times k$$
  $$2\,013 = n + 29 \times 62$$
  $$n = 2\,013 - 1\,798$$
  $$n = 215$$
- Pour $\ell = 3$, le nombre n obtenu sera négatif et ne correspondra pas aux consignes de l'énoncé.

Ainsi, tous les nombres recherchés sont :
$215 \quad ; \quad 1\,114$

Correction 5 *(Sujet académique d'Amiens)*

Déterminons les valeurs des deux premières parenthèses :

- $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 1 - 4 - 9 + 16 = 17 - 13 = 4$
- $5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 = 25 - 36 - 49 + 64 = 89 - 85 = 4$

Dans l'énoncé, la suite logique proposée par les pointillés nous indique aue toutes les parenthèses sont de la forme :
$n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2$

Cette expression admet pour simplification :

$$\begin{aligned} & n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 \\ &= n^2 - (n^2 + 2n + 1) - (n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 6n + 9) \\ &= n^2 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 4n - 4 + n^2 + 6n + 9 \\ &= 9 - 5 = 4 \end{aligned}$$

Pour connaître la valeur de la somme, il reste à connaître le nombre de parenthèses/termes compris dans cette somme.
Les premiers termes de ces parenthèses sont :
$1 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 9 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad 2009$

Ceux sont les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 4. Ainsi, le terme de rang n admet pour expression :

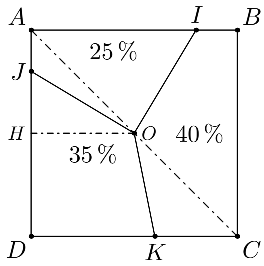
$$2009 = 1 + 4 \times n$$
$$4 \times n = 2009 - 1$$
$$4 \times n = 2008$$
$$n = \frac{2008}{4}$$
$$n = 502$$

Ainsi, la valeur 2009 correspond au terme de rang 502.

Cette somme comporte donc 503 terme.
Cette somme a pour valeur : $4 \times 503 = 2012$.

Correction 6 *(Sujet académique d'Amiens)*

On place les points A, B, C et D les sommets du carré comme l'indique la figure ci-contre :



$ABCD$ étant un carré et le point O étant son centre, on en déduit que le point O est le milieu de la diagonale $[AC]$.

La droite passant par le point O et parallèle à la droite (DC) intercepte la droite $[AD]$ au point H.
D'après la réciproque du théorème des milieux, on en déduit que le point H est le milieu du segment $[AD]$.

H est le milieu de $[AD]$ et O est le milieu de $[AC]$.
D'après le théorème des milieux, on en déduit que :

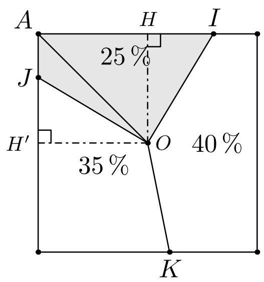
$$HO = \frac{1}{2} \cdot DC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

Déterminons la position du point J :

Notons x la distance AJ :

Le carré a une aire totale de $100\,cm^2$. La part représentant 25 % de ce carré a une aire de $25\,cm^2$.

Sur la représentation ci-contre, on a marqué H et H' les pieds des hauteurs respectivement des triangles AIO et AJO issues du sommet O.



La remarque précédente permet d'affirmer :
$OH = OH' = 5\,cm$

Par décomposition en deux triangles, l'aire formée par le polygone $AJOI$ doit donner la relation :

$$\mathcal{A}_{OIA} + \mathcal{A}_{OAJ} = 25$$
$$\frac{AI \times OH}{2} + \frac{AJ \times OH'}{2} = 25$$
$$\frac{(10-2) \times 5}{2} + \frac{x \times 5}{2} = 25$$
$$\frac{8 \times 5}{2} + \frac{x \times 5}{2} = 25$$
$$20 + \frac{x \times 5}{2} = 25$$
$$\frac{5}{2} \times x = 25 - 20$$
$$\frac{5}{2} \times x = 5$$
$$x = 5 \times \frac{2}{5}$$
$$x = 2$$

La position du point J est caractérisée par la longueur :

 BY-NC

$AJ = 2\,cm$

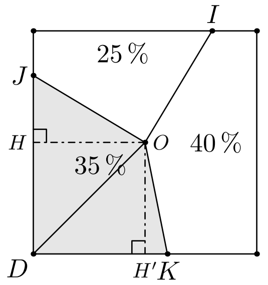
Déterminons la position du point K :

Notons y la distance DK.

La surface définie par le polygone $OJDK$ a pour aire $35\,cm^2$.

On note H et H' les pieds des hauteurs issues du sommet O respectivement dans les triangles OJD et ODK. D'après une remarque précédente, on en déduit les longueurs :

$OH = OH' = 5\,cm$



Par décomposition du polygone $OJDK$ en deux triangles, on doit avoir la relation suivante :

$$\mathcal{A}_{JOD} + \mathcal{A}_{DOK} = 35$$
$$\frac{JD\times OH}{2} + \frac{DK\times OH'}{2} = 35$$
$$\frac{(10-2)\times 5}{2} + \frac{y\times 5}{2} = 35$$
$$\frac{8\times 5}{2} + \frac{5}{2}\times y = 35$$
$$20 + \frac{5}{2}\times y = 35$$
$$\frac{5}{2}\times y = 35 - 20$$
$$\frac{5}{2}\times y = 15$$
$$y = 15\times\frac{2}{5}$$
$$y = 6\,cm$$

Ainsi, la position du point K est caractérisé la distance :

$DK = 6\,cm$

C. Pour la série S :

Correction 7 *(Extrait du sujet national 2012)*

1. Si les nombres choisis sont 1 et 3, alors les dix premiers nombres de la liste ainsi d'efinie sont :

1er	2nd	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

2. En notant a et b les deux premiers nombres choisis, voici la liste des dix premiers termes de cette liste ainsi définie :

1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$	$8a+13b$	$13a+21b$	$21a+34b$

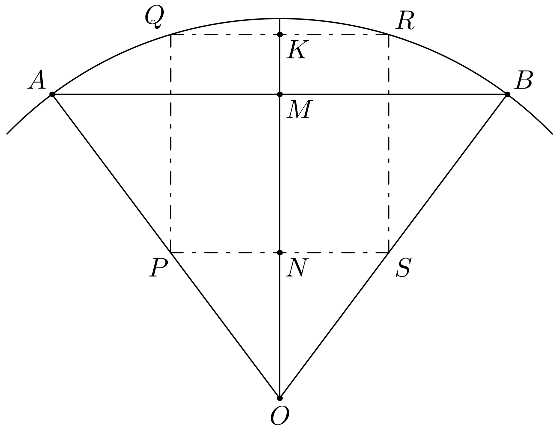
Ainsi, la somme S des dix premiers termes de cette liste a pour valeur :

$$S = a + b + \big(a+b\big) + \big(a+2b\big) + \big(2a+3b\big)$$
$$+ \big(3a+5b\big) + \big(5a+8b\big) + \big(8a+13b\big)$$
$$+ \big(13a+21b\big) + \big(21a+34b\big)$$
$$= 55a + 88b = 11\times\big(5a+8b\big)$$

On vient de montrer que la somme S est multiple du $7e$ de cette liste.

Correction 8 *(Sujet académique d'Amiens)*

1. Voici la figure attendue :



2. Le triangle AMO est rectangle en M. D'après le théorème de Pythagore, on a la relation :

$$OM^2 + AM^2 = AO^2$$
$$OM^2 + 3^2 = 5^2$$
$$OM^2 + 9 = 25$$
$$OM^2 = 25 - 9$$
$$OM^2 = 16$$
$$OM = 4$$

Notons $a = MN$ et $c = QR$. Ainsi, on a l'expression de la longueur PN : $PN = \frac{c}{2}$

Les points O, N, M et les points O, P, A sont alignés.
Les droites (NP) et (MA) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité suivante des quotients :

$$\frac{OP}{OA} = \frac{ON}{OM} = \frac{PN}{AM}$$

Utilisons l'égalité suivante :

$$\frac{ON}{OM} = \frac{PN}{AM}$$
$$\frac{4-a}{4} = \frac{\frac{c}{2}}{3}$$
$$\frac{4-a}{4} = \frac{c}{6}$$

D'après le produit en croix :

$$6\times(4-a) = 4c$$
$$24 - 6a - 4c = 0$$
$$6a + 4c - 24 = 0$$
$$6a = 24 - 4c$$
$$a = 4 - \frac{2}{3}\cdot c$$

Le triangle OKQ est rectangle en K. D'après le théorème de Pythagore, on a la relation :

 BY-NC

$OQ^2 = QK^2 + KO^2$

$$5^2 = \Big(\frac{c}{2}\Big)^2 + \big(4+c-a\big)^2$$

$$25 = \frac{c^2}{4} + \big(4+c-a\big)\big(4+c-a\big)$$

$$25 = \frac{c^2}{4} + 16 + 4c - 4a + 4c + c^2 - ac - 4a - ac + a^2$$

$$9 = \frac{5c^2}{4} + 4c - 8a + 4c - 2ac + a^2$$

En utilisant l'expression de a en fonction de c :

$$9 = \frac{5c^2}{4}+4c-8\Big(4-\frac{2}{3}c\Big)+4c-2\Big(4-\frac{2}{3}c\Big)c+\Big(4-\frac{2}{3}c\Big)^2$$

$$9 = \frac{5c^2}{4}+4c-32+\frac{16}{3}c+4c-8c+\frac{4}{3}c^2+16-\frac{16}{3}c+\frac{4}{9}c^2$$

$$9 = \Big(\frac{5}{4}+\frac{4}{3}+\frac{4}{9}\Big)c^2 + 0\times c - 16$$

$$25 = \frac{45+48+16}{36}\cdot c^2$$

$$c^2 = 25\times\frac{36}{109}$$

$$c^2 = \frac{900}{109}$$

On en déduit que le carré $PQRS$ a pour aire $\dfrac{900}{109}$

Correction 9 *(Extrait du sujet académique d'Amiens)*

1. Sur chaque octogone, on inscrit 8 nombres :
   - sur le premier octogone, on numérote de 1 à 8 ;
   - sur le second octogone, on numérote de 9 à 16 ;
   - sur le troisième octogone, on numérote de 17 à 24 ;
   - sur le quatrième octogone, on numérote de 25 à 32 ;

   Ainsi, le premier nombre marqué sur le quatrième octogone est le nombre 25.

   Pour arriver jusqu'au quatrième polygone, le premier nombre marqué sur chacun des polygone aura aura changer 3 fois de direction. Ainsi, 25 sera marqué sur la direction 25.

2. On a observé que les premiers nombres marqués sur chacun des polygones sont :
   $1 \quad ; \quad 9 \quad ; \quad 17 \quad ; \quad 25\ldots$
   qui sont les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 8.

   Ainsi, le premier nombre marqué sur le huitième octogone sera :
   $1 + 7\times8 = 1 + 56 = 57$

   Pour atteindre le huitième octogone, le premier nombre marqué sur chacun d'eux aura changer 7 fois de direction. Ainsi, le nombre 57 sera marqué sur la direction B.

BY-NC