

Correction (Extrait du sujet national 2012)

1. a. La somme des chiffres de 364 vaut :
 $3 + 6 + 4 = 13$
Le nombre 364 est divisible par 13 :
 $364 = 28 \times 13 + 0$
On en déduit que 364 est un nombre de Harshad.
- b. Tous les nombres sont divisibles par eux-mêmes et un nombre s'écrivant à un chiffre est égal à la somme de ses chiffres ; les nombres suivants sont des nombres de Harshad :
1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9
Le nombre 10 a sa somme des chiffres qui vaut 1 : c'est un nombre de Harshad.
Le nombre 11 a sa somme des chiffres qui vaut 2 et 2 est divisible par 11 : ce n'est pas un nombre de Harshad.
2. a. La somme des chiffres du nombre 1000 vaut 1 et 1000 est divisible par 1 : 1000 est un nombre d'Harshad.
- b. Pour tout entier naturel 10^n a sa somme des chiffres qui vaut 1 et 1 divisant tout nombre, on en déduit que 10^n est un nombre de Harshad.

Correction (Extrait du sujet national 2012)

1. a. La somme des chiffres de 364 vaut :
 $3 + 6 + 4 = 13$
Le nombre 364 est divisible par 13 :
 $364 = 28 \times 13 + 0$
On en déduit que 364 est un nombre de Harshad.
- b. Tous les nombres sont divisibles par eux-mêmes et un nombre s'écrivant à un chiffre est égal à la somme de ses chiffres ; les nombres suivants sont des nombres de Harshad :
1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9
Le nombre 10 a sa somme des chiffres qui vaut 1 : c'est un nombre de Harshad.
Le nombre 11 a sa somme des chiffres qui vaut 2 et 2 est divisible par 11 : ce n'est pas un nombre de Harshad.
2. a. La somme des chiffres du nombre 1000 vaut 1 et 1000 est divisible par 1 : 1000 est un nombre d'Harshad.
- b. Pour tout entier naturel 10^n a sa somme des chiffres qui vaut 1 et 1 divisant tout nombre, on en déduit que 10^n est un nombre de Harshad.

Correction (Extrait du sujet national 2012)

1. a. La somme des chiffres de 364 vaut :
 $3 + 6 + 4 = 13$
Le nombre 364 est divisible par 13 :
 $364 = 28 \times 13 + 0$
On en déduit que 364 est un nombre de Harshad.
- b. Tous les nombres sont divisibles par eux-mêmes et un nombre s'écrivant à un chiffre est égal à la somme de ses chiffres ; les nombres suivants sont des nombres de Harshad :
1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9
Le nombre 10 a sa somme des chiffres qui vaut 1 : c'est un nombre de Harshad.
Le nombre 11 a sa somme des chiffres qui vaut 2 et 2 est divisible par 11 : ce n'est pas un nombre de Harshad.
2. a. La somme des chiffres du nombre 1000 vaut 1 et 1000 est divisible par 1 : 1000 est un nombre d'Harshad.
- b. Pour tout entier naturel 10^n a sa somme des chiffres qui vaut 1 et 1 divisant tout nombre, on en déduit que 10^n est un nombre de Harshad.

Correction (Extrait du sujet national 2012)

1. a. La somme des chiffres de 364 vaut :
 $3 + 6 + 4 = 13$
Le nombre 364 est divisible par 13 :
 $364 = 28 \times 13 + 0$
On en déduit que 364 est un nombre de Harshad.
- b. Tous les nombres sont divisibles par eux-mêmes et un nombre s'écrivant à un chiffre est égal à la somme de ses chiffres ; les nombres suivants sont des nombres de Harshad :
1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9
Le nombre 10 a sa somme des chiffres qui vaut 1 : c'est un nombre de Harshad.
Le nombre 11 a sa somme des chiffres qui vaut 2 et 2 est divisible par 11 : ce n'est pas un nombre de Harshad.
2. a. La somme des chiffres du nombre 1000 vaut 1 et 1000 est divisible par 1 : 1000 est un nombre d'Harshad.
- b. Pour tout entier naturel 10^n a sa somme des chiffres qui vaut 1 et 1 divisant tout nombre, on en déduit que 10^n est un nombre de Harshad.

1. La division euclidienne de 15 par 7 donne :
 $15 = 2 \times 7 + 1$

Ainsi, en faisant tourner de 15 crans la roue R_0 :

- La roue R_0 a fait 2 tours complets puis aura tourné d'un cran ; La roue R_0 indiquera le numéro 1 ;
- Les deux tours complets de R_0 feront avancer de deux crans la roue R_1 . La roue R_1 indiquera le numéro 2 ;
- La roue R_1 n'ayant effectué aucun tour complet, la roue R_2 ne tournera d'aucun cran : elle indiquera 0

Ainsi, le numéro affiché sera 120.

2. La division euclidienne de 100 par 7 donne :
 $100 = 14 \times 7 + 2$

Ainsi, en faisant tourner de 100 crans la roue R_0 :

- La roue R_0 effectuera 14 tours complets et 2 crans supplémentaires ; la roue indiquera le numéro 2 ;
- La roue R_0 effectuant 14 tours complets, on en déduit que la roue R_1 avancera de 14 crans correspondant à deux tours complets : elle affichera le numéro 0.
- Les deux tours complets de la roue R_1 feront avancer la roue R_2 de deux crans : le numéro affiché par la roue R_2 est 2.

Ainsi, le numéro affiché sera 202.

3. Pour que la roue affiche la première fois le numéro 5 :

- Il faut que la roue R_2 ait avancé de 5 crans ;
- Pour que la roue R_2 ait avancé de 5 crans, il faut que la roue R_1 ait fait 5 tours complets : cela signifie que la roue R_1 a besoin d'avoir avancé de :
 $5 \times 7 = 35$ crans
- Pour que la roue R_1 ait avancé de 35 crans, il faut que la roue R_0 ait fait 35 tours complets : cela correspond à :
 $35 \times 7 = 245$ crans.

Pour que la roue R_2 affiche la première fois le numéro 5, il est nécessaire que la roue R_0 ait été avancée de 245 crans.

4. En suivant le raisonnement précédent :

- La roue R_2 a fait un tour complet donc elle a avancé de 7 crans
- La roue R_1 doit avoir fait 7 tours complets, correspondant à :
 $7 \times 7 = 49$ crans
- La roue R_0 doit avoir fait 49 tours complets, correspondant à :
 $49 \times 7 = 343$ crans

5. La division euclidienne de 3580 par 7 donne :
 $3580 = 511 \times 7 + 3$

La division euclidienne de 511 par 7 donne :
 $511 = 73 \times 7 + 0$

La division euclidienne de 73 par 7 donne :
 $73 = 10 \times 7 + 3$

Des informations précédentes, on en déduit qu'en faisant avancer de 3580 crans la roue R_0 :

- La roue R_0 effectuera 511 tours complets et tournera de 3 crans supplémentaires : elle affichera le numéro 3 ;
- La roue R_1 effectuera 73 tours complets : elle affichera le numéro 0 ;
- La roue R_2 effectuera 10 tours complets et tournera de 3 crans supplémentaires : elle affichera le numéro 3.

Ainsi, le compteur affichera 303.

1. La division euclidienne de 15 par 7 donne :
 $15 = 2 \times 7 + 1$

Ainsi, en faisant tourner de 15 crans la roue R_0 :

- La roue R_0 a fait 2 tours complets puis aura tourné d'un cran ; La roue R_0 indiquera le numéro 1 ;
- Les deux tours complets de R_0 feront avancer de deux crans la roue R_1 . La roue R_1 indiquera le numéro 2 ;
- La roue R_1 n'ayant effectué aucun tour complet, la roue R_2 ne tournera d'aucun cran : elle indiquera 0

Ainsi, le numéro affiché sera 120.

2. La division euclidienne de 100 par 7 donne :
 $100 = 14 \times 7 + 2$

Ainsi, en faisant tourner de 100 crans la roue R_0 :

- La roue R_0 effectuera 14 tours complets et 2 crans supplémentaires ; la roue indiquera le numéro 2 ;
- La roue R_0 effectuant 14 tours complets, on en déduit que la roue R_1 avancera de 14 crans correspondant à deux tours complets : elle affichera le numéro 0.
- Les deux tours complets de la roue R_1 feront avancer la roue R_2 de deux crans : le numéro affiché par la roue R_2 est 2.

Ainsi, le numéro affiché sera 202.

3. Pour que la roue affiche la première fois le numéro 5 :

- Il faut que la roue R_2 ait avancé de 5 crans ;
- Pour que la roue R_2 ait avancé de 5 crans, il faut que la roue R_1 ait fait 5 tours complets : cela signifie que la roue R_1 a besoin d'avoir avancé de :
 $5 \times 7 = 35$ crans
- Pour que la roue R_1 ait avancé de 35 crans, il faut que la roue R_0 ait fait 35 tours complets : cela correspond à :
 $35 \times 7 = 245$ crans.

Pour que la roue R_2 affiche la première fois le numéro 5, il est nécessaire que la roue R_0 ait été avancée de 245 crans.

4. En suivant le raisonnement précédent :

- La roue R_2 a fait un tour complet donc elle a avancé de 7 crans
- La roue R_1 doit avoir fait 7 tours complets, correspondant à :
 $7 \times 7 = 49$ crans
- La roue R_0 doit avoir fait 49 tours complets, correspondant à :
 $49 \times 7 = 343$ crans

5. La division euclidienne de 3580 par 7 donne :
 $3580 = 511 \times 7 + 3$

La division euclidienne de 511 par 7 donne :
 $511 = 73 \times 7 + 0$

La division euclidienne de 73 par 7 donne :
 $73 = 10 \times 7 + 3$

Des informations précédentes, on en déduit qu'en faisant avancer de 3580 crans la roue R_0 :

- La roue R_0 effectuera 511 tours complets et tournera de 3 crans supplémentaires : elle affichera le numéro 3 ;
- La roue R_1 effectuera 73 tours complets : elle affichera le numéro 0 ;
- La roue R_2 effectuera 10 tours complets et tournera de 3 crans supplémentaires : elle affichera le numéro 3.

Ainsi, le compteur affichera 303.

Correction (Extrait du sujet académique de l'AEFE - Amérique)

Durant toute la correction, on notera :

$$x = DF \quad ; \quad y = HC$$

1. Le partage équitable de la croûte en trois parts égales donne, dans ce cas particulier, la relation :

$$DA = AG = AB = 1$$

On en déduit que la longueur du rectangle a pour mesure :

$$AB = AG + GB = 1 + 1 + 2$$

Ainsi, le rectangle $ABCD$ a pour aire : $L \times \ell = 2$

Ainsi, chaque part de pizza doit avoir une aire de $\frac{2}{3}$.

- L'aire du triangle ADF doit vérifier :

$$\mathcal{A}_{ADF} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{DA \times DF}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

- L'aire du trapèze $GBCH$ doit vérifier :

$$\mathcal{A}_{GBCH} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{(y+1) \times 1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$y+1 = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{4}{3} - 1$$

$$y = \frac{1}{3}$$

Ainsi, on a les longueurs :

$$DF = \frac{4}{3} \quad ; \quad HC = \frac{1}{3} \quad ; \quad FH = 2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

2. a. **Situation 1 :**

Si $L > 2$ alors $L + \ell > 3$; ceci indique, conformément à la représentation de l'énoncé que les deux points de partage, E et G , de la courbe se retrouvent sur le segment $[AB]$.

Le partage équitable de la courbe donne les égalités :

$$\begin{cases} EG = GB = \frac{L + \ell}{3} = \frac{L + 1}{3} \\ AE = \frac{L + \ell}{3} - 1 = \frac{L + \ell - 3}{3} = \frac{L + 1 - 3}{3} = \frac{L - 2}{3} \end{cases}$$

L'aire totale du rectangle est :

$$\mathcal{A} = AB \times AD = 1 \times L = L.$$

Le partage équitable de l'aire en trois parts égales donne les conditions suivantes :

- Pour le trapèze $AEFD$:

$$\mathcal{A}_{AEFD} = \frac{L}{3}$$

$$\frac{(DF + AE) \times DA}{2} = \frac{L}{3}$$

$$\frac{\left(x + \frac{L-2}{3}\right) \times 1}{2} = \frac{L}{3}$$

$$x + \frac{L-2}{3} = \frac{2L}{3}$$

$$x = \frac{2L}{3} - \frac{L-2}{3}$$

$$x = \frac{2L - L + 2}{3}$$

$$x = \frac{L + 2}{3}$$

- Pour le trapèze $GBCH$:

$$\mathcal{A}_{GBCH} = \frac{L}{3}$$

$$\frac{(GB + HC) \times CB}{2} = \frac{L}{3}$$

$$\frac{\left(\frac{L+1}{3} + y\right) \times 1}{2} = \frac{L}{3}$$

$$\frac{L+1}{3} + y = \frac{2L}{3}$$

$$\frac{L+1}{3} + y = \frac{2L}{3}$$

$$\frac{L+1+3y}{3} = \frac{2L}{3}$$

$$L+1+3y = 2L$$

$$3y = 2L - L - 1$$

$$3y = L - 1$$

$$y = \frac{L-1}{3}$$

On en déduit les longueurs :

$$EG = \frac{L+1}{3} \quad ; \quad GB = \frac{L+1}{3}$$

$$DF = \frac{L+2}{3} \quad ; \quad HC = \frac{L-1}{3}$$

- c. **Situation 2 :**

La longueur totale de la croûte est de $L+1$. De la condi-

tion $L < 1$, on en déduit :

$$L < 2$$

$$L + 1 < 3$$

$$\frac{L+1}{3} < \frac{3}{3}$$

$$\frac{L+1}{3} < 1$$

Cette donnée justifie que le point A est, dans cette situation, un point du segment $[DE]$.

Celle-ci doit être partagée équitablement en 3 parties.

On en déduit les mesures suivantes :

$$DE = \frac{L+1}{3} \quad ; \quad GB = \frac{L+1}{3}$$

L'aire totale du rectangle $ABCD$ est de :

$$\mathcal{A} = L \times \ell = L \times 1 = L$$

Sachant que les trois parties de cette pizza doivent se partager équitablement son aire totale, étudions les aires de quelques éléments de cette figure :

- Pour le triangle DEF :

$$\mathcal{A}_{DEF} = \frac{L}{3}$$

$$\frac{DE \times DF}{2} = \frac{L}{3}$$

$$\frac{\frac{L+1}{3} \times x}{2} = \frac{L}{3}$$

$$\frac{L+1}{3} \times x = \frac{2L}{3}$$

$$(L+1) \times x = 2L$$

$$x = \frac{2L}{L+1}$$

- Pour le trapèze $GBCH$:

$$\mathcal{A}_{GBCH} = \frac{L}{3}$$

$$\frac{(GB + HC) \times CB}{2} = \frac{L}{3}$$

$$\frac{\left(\frac{L+1}{3} + y\right) \times 1}{2} = \frac{L}{3}$$

$$\frac{L+1}{3} + y = \frac{2L}{3}$$

$$y = \frac{2L}{3} - \frac{L+1}{3}$$

$$y = \frac{L-1}{3}$$

On en déduit les longueurs :

$$DE = \frac{L+1}{3} \quad ; \quad GB = \frac{L+1}{3}$$

$$DF = \frac{2L}{L+1} \quad ; \quad HC = \frac{L-1}{3}$$

1. a. L'écart entre les deux nombres 12 589 et 12 705 a pour valeur :

$$12\,589 - 12\,705 = 116$$

La division euclidienne de 116 par 29 donne :

$$116 = 4 \times 29 + 0$$

Ainsi, on peut passer de 12 589 à 12 705 en ajoutant exactement 4 fois le nombre 29.

- b. L'écart entre les deux nombres 1 485 et 310 190 a pour valeur :

$$310\,190 - 1\,485 = 308\,705$$

La division euclidienne de 308 705 par 29 donne la relation :

$$308\,705 = 10\,645 \times 29 + 0$$

On en déduit qu'on se peut se déplacer du nombre 1 485 au nombre 310 190 en comptant de 29 en 29.

2. La division euclidienne de 2013 par 29 donne la relation :

$$2013 = 69 \times 29 + 12$$

Ainsi, en choisissant le nombre 12, l'écart entre ce nombre et 2013 est de :

$$2013 - 12 = 2001$$

Et cet écart est un multiple de 29 :

$$2013 - 12 = 69 \times 29$$

On en déduit que le plus petit entier naturel à partir duquel il est possible d'atteindre 2013 en comptant de 29 en 29 est l'entier 12.

3. Supposons qu'il existe un entier n inférieur à 2013 tel que :

- Il soit possible en partant de n d'atteindre 2013 en comptant de 29 en 29.

C'est-à-dire qu'on a l'existence d'un entier naturel k vérifiant la relation :

$$2013 = n + 29 \times k$$

- Il soit possible en partant de n d'atteindre 2013 en comptant de 31 en 31.

C'est-à-dire qu'on a l'existence d'un entier naturel k' vérifiant la relation :

$$2013 = n + 31 \times k'$$

Ainsi, les entiers k et k' doivent vérifier la relation :

$$n + 29 \times k = n + 31 \times k'$$

$$29 \times k = 31 \times k'$$

D'après le produit en croix :

$$\frac{29}{31} = \frac{k'}{k}$$

Les nombres 29 et 31 étant deux nombres premiers, on en déduit que la fraction $\frac{29}{31}$ est une fraction irréductible.

Ainsi, il existe un nombre entier ℓ vérifiant les deux relations :

$$29 = k' \div \ell \quad ; \quad 31 = k \div \ell$$

Etudions les différentes valeurs possibles de ℓ :

- Pour $\ell=1$:

$$\text{On a : } 31 = k \div \ell \implies k = 31$$

De l'égalité :

$$2013 = n + 29 \times k$$

$$2013 = n + 29 \times 31$$

$$n = 2013 - 899$$

$$n = 1\,114$$

- Pour $\ell=2$:

$$\text{On a : } 31 = k \div \ell \implies k = 62$$

De l'égalité :

$$2013 = n + 29 \times k$$

$$2013 = n + 29 \times 62$$

$$n = 2013 - 1\,798$$

$$n = 215$$

- Pour $\ell=3$, le nombre n obtenu sera négatif et ne correspondra pas aux consignes de l'énoncé.

Ainsi, tous les nombres recherchés sont :

$$215 \quad ; \quad 1\,114$$

1. a. L'écart entre les deux nombres 12 589 et 12 705 a pour valeur :

$$12\,589 - 12\,705 = 116$$

La division euclidienne de 116 par 29 donne :

$$116 = 4 \times 29 + 0$$

Ainsi, on peut passer de 12 589 à 12 705 en ajoutant exactement 4 fois le nombre 29.

- b. L'écart entre les deux nombres 1 485 et 310 190 a pour valeur :

$$310\,190 - 1\,485 = 308\,705$$

La division euclidienne de 308 705 par 29 donne la relation :

$$308\,705 = 10\,645 \times 29 + 0$$

On en déduit qu'on se peut se déplacer du nombre 1 485 au nombre 310 190 en comptant de 29 en 29.

2. La division euclidienne de 2013 par 29 donne la relation :

$$2013 = 69 \times 29 + 12$$

Ainsi, en choisissant le nombre 12, l'écart entre ce nombre et 2013 est de :

$$2013 - 12 = 2001$$

Et cet écart est un multiple de 29 :

$$2013 - 12 = 69 \times 29$$

On en déduit que le plus petit entier naturel à partir duquel il est possible d'atteindre 2013 en comptant de 29 en 29 est l'entier 12.

3. Supposons qu'il existe un entier n inférieur à 2013 tel que :

- Il soit possible en partant de n d'atteindre 2013 en comptant de 29 en 29.

C'est-à-dire qu'on a l'existence d'un entier naturel k vérifiant la relation :

$$2013 = n + 29 \times k$$

- Il soit possible en partant de n d'atteindre 2013 en comptant de 31 en 31.

C'est-à-dire qu'on a l'existence d'un entier naturel k' vérifiant la relation :

$$2013 = n + 31 \times k'$$

Ainsi, les entiers k et k' doivent vérifier la relation :

$$n + 29 \times k = n + 31 \times k'$$

$$29 \times k = 31 \times k'$$

D'après le produit en croix :

$$\frac{29}{31} = \frac{k'}{k}$$

Les nombres 29 et 31 étant deux nombres premiers, on en déduit que la fraction $\frac{29}{31}$ est une fraction irréductible.

Ainsi, il existe un nombre entier ℓ vérifiant les deux relations :

$$29 = k' \div \ell \quad ; \quad 31 = k \div \ell$$

Etudions les différentes valeurs possibles de ℓ :

- Pour $\ell=1$:

$$\text{On a : } 31 = k \div \ell \implies k = 31$$

De l'égalité :

$$2013 = n + 29 \times k$$

$$2013 = n + 29 \times 31$$

$$n = 2013 - 899$$

$$n = 1\,114$$

- Pour $\ell=2$:

$$\text{On a : } 31 = k \div \ell \implies k = 62$$

De l'égalité :

$$2013 = n + 29 \times k$$

$$2013 = n + 29 \times 62$$

$$n = 2013 - 1\,798$$

$$n = 215$$

- Pour $\ell=3$, le nombre n obtenu sera négatif et ne correspondra pas aux consignes de l'énoncé.

Ainsi, tous les nombres recherchés sont :

$$215 \quad ; \quad 1\,114$$

Correction (Sujet académique d'Amiens)

Déterminons les valeurs des deux premières parenthèses :

$$\bullet 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 1 - 4 - 9 + 16 = 17 - 13 = 4$$

$$\bullet 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 = 25 - 36 - 49 + 64 = 89 - 85 = 4$$

Dans l'énoncé, la suite logique proposée par les pointillés nous indique que toutes les parenthèses sont de la forme :

$$n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2$$

Cette expression admet pour simplification :

$$\begin{aligned} n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 \\ &= n^2 - (n^2 + 2n + 1) - (n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 6n + 9) \\ &= n^2 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 4n - 4 + n^2 + 6n + 9 \\ &= 9 - 5 = 4 \end{aligned}$$

Pour connaître la valeur de la somme, il reste à connaître le nombre de parenthèses/termes compris dans cette somme. Les premiers termes de ces parenthèses sont :

$$1 ; 5 ; 9 ; \dots ; 2009$$

Ceux sont les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 4. Ainsi, le terme de rang n admet pour expression :

$$2009 = 1 + 4 \times n$$

$$4 \times n = 2009 - 1$$

$$4 \times n = 2008$$

$$n = \frac{2008}{4}$$

$$n = 502$$

Ainsi, la valeur 2009 correspond au terme de rang 502.

Cette somme comporte donc 503 termes.

Cette somme a pour valeur : $4 \times 503 = 2012$.

Correction (Sujet académique d'Amiens)

Déterminons les valeurs des deux premières parenthèses :

$$\bullet 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 1 - 4 - 9 + 16 = 17 - 13 = 4$$

$$\bullet 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 = 25 - 36 - 49 + 64 = 89 - 85 = 4$$

Dans l'énoncé, la suite logique proposée par les pointillés nous indique que toutes les parenthèses sont de la forme :

$$n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2$$

Cette expression admet pour simplification :

$$\begin{aligned} n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 \\ &= n^2 - (n^2 + 2n + 1) - (n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 6n + 9) \\ &= n^2 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 4n - 4 + n^2 + 6n + 9 \\ &= 9 - 5 = 4 \end{aligned}$$

Pour connaître la valeur de la somme, il reste à connaître le nombre de parenthèses/termes compris dans cette somme. Les premiers termes de ces parenthèses sont :

$$1 ; 5 ; 9 ; \dots ; 2009$$

Ceux sont les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 4. Ainsi, le terme de rang n admet pour expression :

$$2009 = 1 + 4 \times n$$

$$4 \times n = 2009 - 1$$

$$4 \times n = 2008$$

$$n = \frac{2008}{4}$$

$$n = 502$$

Ainsi, la valeur 2009 correspond au terme de rang 502.

Cette somme comporte donc 503 termes.

Cette somme a pour valeur : $4 \times 503 = 2012$.

Correction (Sujet académique d'Amiens)

Déterminons les valeurs des deux premières parenthèses :

$$\bullet 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 1 - 4 - 9 + 16 = 17 - 13 = 4$$

$$\bullet 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 = 25 - 36 - 49 + 64 = 89 - 85 = 4$$

Dans l'énoncé, la suite logique proposée par les pointillés nous indique que toutes les parenthèses sont de la forme :

$$n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2$$

Cette expression admet pour simplification :

$$\begin{aligned} n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 \\ &= n^2 - (n^2 + 2n + 1) - (n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 6n + 9) \\ &= n^2 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 4n - 4 + n^2 + 6n + 9 \\ &= 9 - 5 = 4 \end{aligned}$$

Pour connaître la valeur de la somme, il reste à connaître le nombre de parenthèses/termes compris dans cette somme. Les premiers termes de ces parenthèses sont :

$$1 ; 5 ; 9 ; \dots ; 2009$$

Ceux sont les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 4. Ainsi, le terme de rang n admet pour expression :

$$2009 = 1 + 4 \times n$$

$$4 \times n = 2009 - 1$$

$$4 \times n = 2008$$

$$n = \frac{2008}{4}$$

$$n = 502$$

Ainsi, la valeur 2009 correspond au terme de rang 502.

Cette somme comporte donc 503 termes.

Cette somme a pour valeur : $4 \times 503 = 2012$.

Correction (Sujet académique d'Amiens)

Déterminons les valeurs des deux premières parenthèses :

$$\bullet 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 1 - 4 - 9 + 16 = 17 - 13 = 4$$

$$\bullet 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 = 25 - 36 - 49 + 64 = 89 - 85 = 4$$

Dans l'énoncé, la suite logique proposée par les pointillés nous indique que toutes les parenthèses sont de la forme :

$$n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2$$

Cette expression admet pour simplification :

$$\begin{aligned} n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 \\ &= n^2 - (n^2 + 2n + 1) - (n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 6n + 9) \\ &= n^2 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 4n - 4 + n^2 + 6n + 9 \\ &= 9 - 5 = 4 \end{aligned}$$

Pour connaître la valeur de la somme, il reste à connaître le nombre de parenthèses/termes compris dans cette somme. Les premiers termes de ces parenthèses sont :

$$1 ; 5 ; 9 ; \dots ; 2009$$

Ceux sont les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 4. Ainsi, le terme de rang n admet pour expression :

$$2009 = 1 + 4 \times n$$

$$4 \times n = 2009 - 1$$

$$4 \times n = 2008$$

$$n = \frac{2008}{4}$$

$$n = 502$$

Ainsi, la valeur 2009 correspond au terme de rang 502.

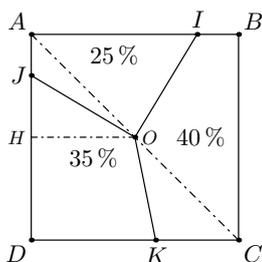
Cette somme comporte donc 503 termes.

Cette somme a pour valeur : $4 \times 503 = 2012$.

Correction (Sujet académique d'Amiens)

On place les points A, B, C et D les sommets du carré comme l'indique la figure ci-contre :

$ABCD$ étant un carré et le point O étant son centre, on en déduit que le point O est le milieu de la diagonale $[AC]$.



La droite passant par le point O et parallèle à la droite (DC) intercepte la droite $[AD]$ au point H .

D'après la réciproque du théorème des milieux, on en déduit que le point H est le milieu du segment $[AD]$.

H est le milieu de $[AD]$ et O est le milieu de $[AC]$.

D'après le théorème des milieux, on en déduit que :

$$HO = \frac{1}{2} \cdot DC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

Déterminons la position du point J :

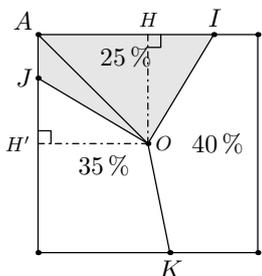
Notons x la distance AJ :

Le carré a une aire totale de 100 cm^2 . La part représentant 25 % de ce carré a une aire de 25 cm^2 .

Sur la représentation ci-contre, on a marqué H et H' les pieds des hauteurs respectivement des triangles AIO et AJO issues du sommet O .

La remarque précédente permet d'affirmer :

$$OH = OH' = 5 \text{ cm}$$



Par décomposition en deux triangles, l'aire formée par le polygone $AJOI$ doit donner la relation :

$$\mathcal{A}_{OIA} + \mathcal{A}_{OAJ} = 25$$

$$\frac{AI \times OH}{2} + \frac{AJ \times OH'}{2} = 25$$

$$\frac{(10 - 2) \times 5}{2} + \frac{x \times 5}{2} = 25$$

$$\frac{8 \times 5}{2} + \frac{x \times 5}{2} = 25$$

$$20 + \frac{x \times 5}{2} = 25$$

$$\frac{5}{2} \times x = 25 - 20$$

$$\frac{5}{2} \times x = 5$$

$$x = 5 \times \frac{2}{5}$$

$$x = 2$$

La position du point J est caractérisée par la longueur :

$$AJ = 2 \text{ cm}$$

Déterminons la position du point K :

Notons y la distance DK .

La surface définie par le polygone $OJDK$ a pour aire 35 cm^2 .

On note H et H' les pieds des hauteurs issues du sommet O respectivement dans les triangles OJD et ODK . D'après une remarque précédente, on en déduit les longueurs :

$$OH = OH' = 5 \text{ cm}$$

Par décomposition du polygone $OJDK$ en deux triangles, on doit avoir la relation suivante :

$$\mathcal{A}_{JOD} + \mathcal{A}_{DOK} = 35$$

$$\frac{JD \times OH}{2} + \frac{DK \times OH'}{2} = 35$$

$$\frac{(10 - 2) \times 5}{2} + \frac{y \times 5}{2} = 35$$

$$\frac{8 \times 5}{2} + \frac{5}{2} \times y = 35$$

$$20 + \frac{5}{2} \times y = 35$$

$$\frac{5}{2} \times y = 35 - 20$$

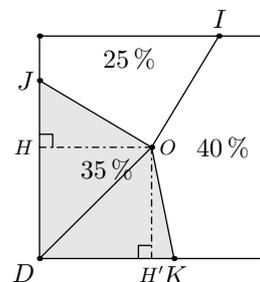
$$\frac{5}{2} \times y = 15$$

$$y = 15 \times \frac{2}{5}$$

$$y = 6 \text{ cm}$$

Ainsi, la position du point K est caractérisé la distance :

$$DK = 6 \text{ cm}$$



Correction (Extrait du sujet national 2012)

1. Si les nombres choisis sont 1 et 3, alors les dix premiers nombres de la liste ainsi définie sont :

1er	2nd	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

2. En notant a et b les deux premiers nombres choisis, voici la liste des dix premiers termes de cette liste ainsi définie :

1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$	$8a+13b$	$13a+21b$	$21a+34b$

Ainsi, la somme S des dix premiers termes de cette liste a pour valeur :

$$\begin{aligned}
 S &= a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) \\
 &\quad + (3a + 5b) + (5a + 8b) + (8a + 13b) \\
 &\quad + (13a + 21b) + (21a + 34b) \\
 &= 55a + 88b = 11 \times (5a + 8b)
 \end{aligned}$$

On vient de montrer que la somme S est multiple du 7e de cette liste.

Correction (Extrait du sujet national 2012)

1. Si les nombres choisis sont 1 et 3, alors les dix premiers nombres de la liste ainsi définie sont :

1er	2nd	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

2. En notant a et b les deux premiers nombres choisis, voici la liste des dix premiers termes de cette liste ainsi définie :

1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$	$8a+13b$	$13a+21b$	$21a+34b$

Ainsi, la somme S des dix premiers termes de cette liste a pour valeur :

$$\begin{aligned}
 S &= a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) \\
 &\quad + (3a + 5b) + (5a + 8b) + (8a + 13b) \\
 &\quad + (13a + 21b) + (21a + 34b) \\
 &= 55a + 88b = 11 \times (5a + 8b)
 \end{aligned}$$

On vient de montrer que la somme S est multiple du 7e de cette liste.

Correction (Extrait du sujet national 2012)

1. Si les nombres choisis sont 1 et 3, alors les dix premiers nombres de la liste ainsi définie sont :

1er	2nd	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

2. En notant a et b les deux premiers nombres choisis, voici la liste des dix premiers termes de cette liste ainsi définie :

1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$	$8a+13b$	$13a+21b$	$21a+34b$

Ainsi, la somme S des dix premiers termes de cette liste a pour valeur :

$$\begin{aligned}
 S &= a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) \\
 &\quad + (3a + 5b) + (5a + 8b) + (8a + 13b) \\
 &\quad + (13a + 21b) + (21a + 34b) \\
 &= 55a + 88b = 11 \times (5a + 8b)
 \end{aligned}$$

On vient de montrer que la somme S est multiple du 7e de cette liste.

Correction (Extrait du sujet national 2012)

1. Si les nombres choisis sont 1 et 3, alors les dix premiers nombres de la liste ainsi définie sont :

1er	2nd	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

2. En notant a et b les deux premiers nombres choisis, voici la liste des dix premiers termes de cette liste ainsi définie :

1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e
a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$	$8a+13b$	$13a+21b$	$21a+34b$

Ainsi, la somme S des dix premiers termes de cette liste a pour valeur :

$$\begin{aligned}
 S &= a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) \\
 &\quad + (3a + 5b) + (5a + 8b) + (8a + 13b) \\
 &\quad + (13a + 21b) + (21a + 34b) \\
 &= 55a + 88b = 11 \times (5a + 8b)
 \end{aligned}$$

On vient de montrer que la somme S est multiple du 7e de cette liste.

Correction (Extrait du sujet académique d'Amiens)

1. Sur chaque octogone, on inscrit 8 nombres :
 - sur le premier octogone, on numérote de 1 à 8 ;
 - sur le second octogone, on numérote de 9 à 16 ;
 - sur le troisième octogone, on numérote de 17 à 24 ;
 - sur le quatrième octogone, on numérote de 25 à 32 ;

Ainsi, le premier nombre marqué sur le quatrième octogone est le nombre 25.

Pour arriver jusqu'au quatrième polygone, le premier nombre marqué sur chacun des polygone aura aura changer 3 fois de direction. Ainsi, 25 sera marqué sur la direction 25.

2. On a observé que les premiers nombres marqués sur chacun des polygones sont :

1 ; 9 ; 17 ; 25...

qui sont les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 8.

Ainsi, le premier nombre marqué sur le huitième octogone sera :

$$1 + 7 \times 8 = 1 + 56 = 57$$

Pour atteindre le huitième octogone, le premier nombre marqué sur chacun d'eux aura changer 7 fois de direction. Ainsi, le nombre 57 sera marqué sur la direction B .

Correction (Extrait du sujet académique d'Amiens)

1. Sur chaque octogone, on inscrit 8 nombres :
 - sur le premier octogone, on numérote de 1 à 8 ;
 - sur le second octogone, on numérote de 9 à 16 ;
 - sur le troisième octogone, on numérote de 17 à 24 ;
 - sur le quatrième octogone, on numérote de 25 à 32 ;

Ainsi, le premier nombre marqué sur le quatrième octogone est le nombre 25.

Pour arriver jusqu'au quatrième polygone, le premier nombre marqué sur chacun des polygone aura aura changer 3 fois de direction. Ainsi, 25 sera marqué sur la direction 25.

2. On a observé que les premiers nombres marqués sur chacun des polygones sont :

1 ; 9 ; 17 ; 25...

qui sont les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 8.

Ainsi, le premier nombre marqué sur le huitième octogone sera :

$$1 + 7 \times 8 = 1 + 56 = 57$$

Pour atteindre le huitième octogone, le premier nombre marqué sur chacun d'eux aura changer 7 fois de direction. Ainsi, le nombre 57 sera marqué sur la direction B .

Correction (Extrait du sujet académique d'Amiens)

1. Sur chaque octogone, on inscrit 8 nombres :
 - sur le premier octogone, on numérote de 1 à 8 ;
 - sur le second octogone, on numérote de 9 à 16 ;
 - sur le troisième octogone, on numérote de 17 à 24 ;
 - sur le quatrième octogone, on numérote de 25 à 32 ;

Ainsi, le premier nombre marqué sur le quatrième octogone est le nombre 25.

Pour arriver jusqu'au quatrième polygone, le premier nombre marqué sur chacun des polygone aura aura changer 3 fois de direction. Ainsi, 25 sera marqué sur la direction 25.

2. On a observé que les premiers nombres marqués sur chacun des polygones sont :

1 ; 9 ; 17 ; 25...

qui sont les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 8.

Ainsi, le premier nombre marqué sur le huitième octogone sera :

$$1 + 7 \times 8 = 1 + 56 = 57$$

Pour atteindre le huitième octogone, le premier nombre marqué sur chacun d'eux aura changer 7 fois de direction. Ainsi, le nombre 57 sera marqué sur la direction B .

Correction (Extrait du sujet académique d'Amiens)

1. Sur chaque octogone, on inscrit 8 nombres :
 - sur le premier octogone, on numérote de 1 à 8 ;
 - sur le second octogone, on numérote de 9 à 16 ;
 - sur le troisième octogone, on numérote de 17 à 24 ;
 - sur le quatrième octogone, on numérote de 25 à 32 ;

Ainsi, le premier nombre marqué sur le quatrième octogone est le nombre 25.

Pour arriver jusqu'au quatrième polygone, le premier nombre marqué sur chacun des polygone aura aura changer 3 fois de direction. Ainsi, 25 sera marqué sur la direction 25.

2. On a observé que les premiers nombres marqués sur chacun des polygones sont :

1 ; 9 ; 17 ; 25...

qui sont les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 8.

Ainsi, le premier nombre marqué sur le huitième octogone sera :

$$1 + 7 \times 8 = 1 + 56 = 57$$

Pour atteindre le huitième octogone, le premier nombre marqué sur chacun d'eux aura changer 7 fois de direction. Ainsi, le nombre 57 sera marqué sur la direction B .