

# Entraînement au concours Olympiade

## A. Pour toutes les séries :

### Exercice 1 (Extrait du sujet national 2012)

Un entier naturel non nul est un nombre Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres.

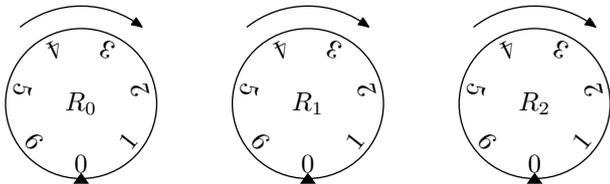
Par exemple,  $n=24$  est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est  $2+4=6$ , et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre de Harshad.  
b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?
2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.  
b. Soit  $n$  un entier non nul. Donner un nombre Harshad de  $n$  chiffres.

### Exercice 2 (Extrait du sujet académique d'Amiens)

Un compteur est composé de trois roues crantées, nommées  $R_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$  comportant toutes les trois 7 crans, numérotés de 0 à 6. Ce compteur est conçu de sorte que :

- Les roues tournent toujours d'un cran vers le cran suivant, dans cet ordre :  
 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 0$
- Lorsque la roue  $R_0$  effectue un tour complet, c'est à dire lorsqu'elle tourne de 7 crans alors la roue  $R_1$  tourne d'un cran.
- Lorsque la roue  $R_1$  effectue un tour complet, c'est à dire lorsqu'elle tourne de 7 crans, alors la roue  $R_2$  tourne d'un cran.
- Initialement, les roues  $R_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$  affichent toutes 0.



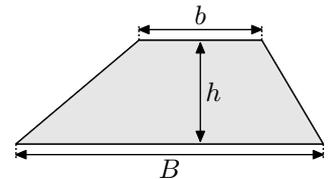
Entre chaque question, le compteur est remis à zéro, c'est-à-dire que chaque roue affiche de nouveau 0

1. On tourne la roue  $R_0$  de 15 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues ?
2. On tourne la roue  $R_0$  de 100 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues ?
3. On tourne la roue  $R_0$  jusqu'à ce que la roue  $R_2$  affiche 5 pour la première fois. De combien de crans a-t-on tourné  $R_0$  ?
4. De combien de crans faut-il tourner  $R_0$  pour que les roues reviennent pour la première fois en même temps à 0 ?
5. On tourne la roue  $R_0$  de 3580 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues ?

### Exercice 3 (Extrait du sujet académique de l'AEFE - Amérique)

Rappel : Aire d'un trapèze

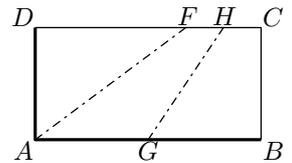
$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$



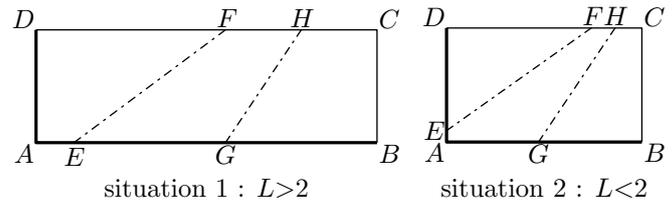
Une pizza rectangulaire  $ABCD$  comporte de la croûte sur deux côtés consécutifs,  $[DA]$  et  $[AB]$ . On cherche comment partager la pizza en trois morceaux équitables : chaque part doit avoir la même longueur de croûte et la même aire.

Dans chaque situation, on fixe la longueur du petit côté  $AD=1$ .

1. Dans le cas particulier ci-contre, on suppose que le partage réalisé est équitable. Quelle est la longueur  $AB$  ? Déterminer les longueurs :  $DF$ ,  $FH$  et  $HC$ .



2. On généralise la situation en posant  $AB=L$  (et en supposant toujours que  $AD=1$ ). Déterminer, pour chaque situation ci-dessous, les longueurs utiles permettant de découper équitablement la pizza.



## B. Séries autre que S :

### Exercice 4 (Sujet académique d'Aix-Marseille)

1. a. En partant de 12589 et en comptant de 29 en 29, peut-on atteindre le nombre 12705 ?  
b. En partant de 1485 et en comptant de 29 en 29, peut-on atteindre le nombre 310190 ? Expliquer comment vous avez trouvé.
2. Quel est le plus petit entier positif à partir duquel, en comptant de 29 en 29, on peut atteindre 2013 ?
3. Existe-t-il des entiers positifs inférieurs à 2013 à partir desquels il est possible d'atteindre ce nombre aussi bien en comptant de 29 en 29 qu'en comptant de 31 en 31 ? Si oui, les trouver tous.

### Exercice 5 (Sujet académique d'Amiens)

Calculer la somme suivante sans utiliser la calculatrice :

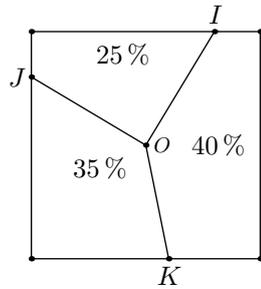
$$(1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + (9^2 - 10^2 - 11^2 + 12^2) + \dots + (2009^2 - 2010^2 - 2011^2 + 2012^2)$$

**Exercice 6** (Sujet académique d'Amiens)

Dans un carré de 10 cm de côté, on veut réaliser un graphique statistique dans lequel les aires des 3 parties doivent être proportionnelles aux fréquences qu'elles représentent ( $O$  est le centre du carré).

Le point  $I$  est à 2 cm du sommet le plus proche.

Calculer les distances de  $J$  et  $K$  aux sommets du carré les plus proches.



## C. Pour la série S :

**Exercice 7** (Extrait du sujet national 2012)

A partir de deux nombres positifs, on construit une liste de nombres où chaque nombre est la somme des deux précédents.

1. Choisir deux nombres entiers positifs inférieurs à 10 et déterminer les dix premiers nombres de la liste définie précédemment.
2. Un mathémagicien prétend être capable de déterminer rapidement et exactement la somme des dix premiers nombres d'une liste quelconque ainsi construite. Montrer que, quels que soient les nombres de départ, cette somme est multiple d'un des nombres de la liste dont on déterminera la position.

**Exercice 8** (Sujet académique d'Amiens)

$A$  et  $B$  sont deux points d'un cercle de centre  $O$  et de rayon 5 tels que  $AB=6$ .

Le carré  $PQRS$  est inscrit dans le secteur angulaire  $OAB$  de sorte que :

- $P$  est sur le rayon  $[OA]$  ;
- $S$  est sur le rayon  $[OB]$  ;
- $Q$  et  $R$  sont deux points de l'arc de cercle reliant  $A$  et  $B$ .

1. Faire une figure correspondant à la situation proposée.
2. Calculer l'aire du carré  $PQRS$ .

**Exercice 9** (Extrait du sujet académique d'Amiens)

On considère des octogones réguliers, de même centre  $O$ .

Aux sommets de l'octogone central, on note les huit premiers entiers non nuls.

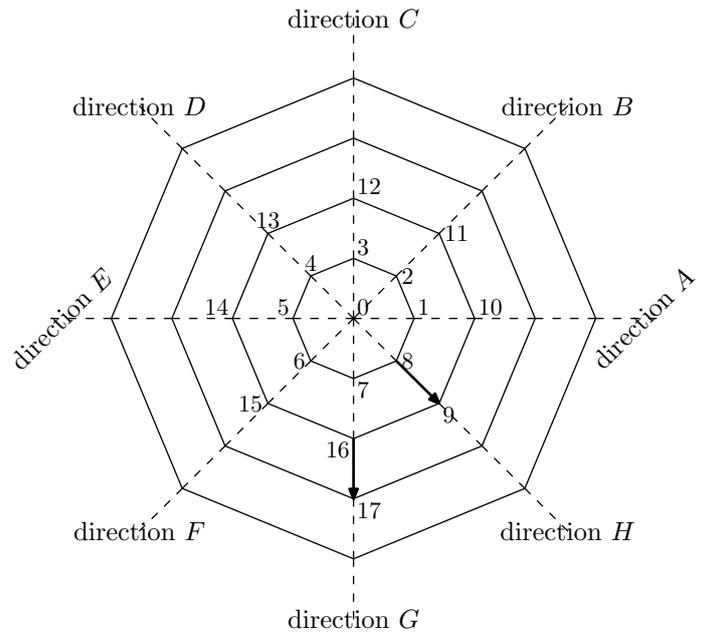
Sur les sommets du deuxième octogone, on inscrit les 8 premiers nombres entiers suivants, avec une rotation de 45 degrés autour du point  $O$ .

Et ainsi de suite...

On dit que chaque nombre entier a une direction ( $A, B, C, D, E, F, G$  ou  $H$  par rapport à l'origine  $O$ ).

Par exemple, 1 a pour direction  $A$ , 2 a pour direction  $B$ ...

Voici une figure représentant les quatre premiers octogones :



1. Quel sera le premier entier inscrit sur le quatrième octogone ? Préciser sa direction.
2. Déterminer le premier entier inscrit sur le huitième octogone. Préciser sa direction.