La fonction exponentielle

A. Définition :

Soit x un nombre réel quelconque, on définit les deux suites (u_n) et (v_n) définient par :

$$u_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad ; \quad v_n=\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

Lemme : *(1 - de Bernoulli)*

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n non-nul et pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $\left[-1\,;+\infty\right[$, on a la propriété suivante :

$$\left(1+x\right)^n \geqslant 1+n{\cdot}x$$

Preuve :

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier nature n non-nul par :

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{“}\left(1+x\right)^n \geqslant 1+n{\cdot}x\text{”}$$

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
  On a :
  $$\left(1+x\right)^1=1+x \quad ; \quad 1+1{\cdot}x=1+x$$
  Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- **Hérédité :**
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n non-nul quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
  $$\left(1+x\right)^n \geqslant 1+n{\cdot}x$$
  Partons de la comparaison :
  $$\left(1+x\right)^n \geqslant 1+n{\cdot}x$$
  Le nombre $1+x$ étant positif :
  $$\left(1+x\right)^n{\cdot}\left(1+x\right) \geqslant \left(1+n{\cdot}x\right){\cdot}\left(1+x\right)$$
  $$\left(1+x\right)^n{\cdot}\left(1+x\right) \geqslant 1+x+n{\cdot}x+n{\cdot}x^2$$
  $$\left(1+x\right)^n{\cdot}\left(1+x\right) \geqslant 1+\left(n+1\right){\cdot}x+n{\cdot}x^2$$
  Or, le terme $n{\cdot}x^2$ étant positif :
  $$\left(1+x\right)^n{\cdot}\left(1+x\right) \geqslant 1+\left(n+1\right){\cdot}x$$
  On vient d'établir la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ s'initialise au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non-nul.

Lemme : *(2)*

Pour tout nombre réel x et n un entier naturel. On a l'égalité :

$$1-\frac{x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}=\frac{n\left(n+1+x\right)}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}$$

Preuve :

On a les transformations algébriques :

$$1-\frac{x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}=\frac{\left(n+x\right)\left(n+1\right)-x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}$$
$$=\frac{n^2+n+n{\cdot}x+x-x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}=\frac{n^2+n+n{\cdot}x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}$$
$$=\frac{n{\cdot}\left(n+1+x\right)}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}$$

Lemme : *(3)*

Pour tout nombre réel x et n un entier naturel :

$$\left[1-\frac{n{\cdot}x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}\right]{\cdot}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)=1+\frac{x^2}{\left(n+1\right)^2\left(x+n\right)}$$

Preuve :

$$\left[1-\frac{n{\cdot}x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}\right]{\cdot}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)$$
$$=1+\frac{x}{n+1}-\frac{n{\cdot}x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}-\frac{n{\cdot}x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}\times\frac{x}{n+1}$$
$$=1+\frac{x}{n+1}-\frac{n{\cdot}x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}-\frac{n{\cdot}x^2}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)^2}$$
$$=1+\frac{x{\cdot}\left(n+x\right)\left(n+1\right)}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)^2}-\frac{n{\cdot}x\left(n+1\right)}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)^2}-\frac{n{\cdot}x^2}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)^2}$$
$$=1+\frac{x{\cdot}\left(n+x\right)\left(n+1\right)-n{\cdot}x\left(n+1\right)-n{\cdot}x^2}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)^2}$$
$$=1+\frac{x{\cdot}n^2+n{\cdot}x+n{\cdot}x^2+x^2-n^2{\cdot}x-n{\cdot}x-n{\cdot}x^2}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)^2}$$
$$=1+\frac{x^2}{\left(n+1\right)^2\left(x+n\right)}$$

Lemme : *(4)*

La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Démonstration :

Raisonnons par une disjonction de cas :

- Supposons que x est un nombre strictement positif.
  Dans ce cas, les quantités $1+\dfrac{x}{n}$ et $1+\dfrac{x}{n+1}$ sont strictement positives ainsi que leur puissances.
  Considérons le quotient :
  $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}=\frac{\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^n}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}{\cdot}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)$$
  $$=\left(\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}}\right)^n{\cdot}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)$$
  $$=\left(\frac{\dfrac{n+1+x}{n+1}}{\dfrac{n+x}{n}}\right)^n{\cdot}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)$$
  $$=\left(\frac{n+1+x}{n+1}\times\frac{n}{n+x}\right)^n{\cdot}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)$$
  $$=\left[\frac{n{\cdot}\left(n+1+x\right)}{\left(n+x\right){\cdot}\left(n+1\right)}\right]^n{\cdot}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)$$
  D'après le lemme 2, on a :
  $$=\left[1-\frac{x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}\right]^n{\cdot}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)$$
  On remarque que : $-1\leqslant-\dfrac{x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}<0$
  D'après le lemme de Bernoulli *(1)* :
  $$=\left[1-n{\cdot}\frac{x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}\right]{\cdot}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)$$
  D'après le lemme 3 :
  $$=1+\frac{x^2}{\left(n+1\right)^2\left(x+n\right)}$$
  Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :
  $$1+\frac{x^2}{\left(n+1\right)^2\left(x+n\right)}\geqslant 1$$
  $$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$$
  $$u_{n+1}\geqslant u_n$$
  On en déduit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 0.

- Supposons que x est nul. Alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang 0.

- Supposons que x est strictement négative.
  On adapte le premier cas afin de permettre d'utiliser la même démonstration :
  - Pour n suffisamment grand, les nombres $1+\dfrac{x}{n}$ et $1+\dfrac{x}{n+1}$ sont strictement positif.
  - Pour n suffisamment grand, on peut utiliser le lemme de Bernoulli car on a la comparaison :
    $$-\frac{x}{\left(n+x\right)\left(n+1\right)}\geqslant 0$$

Lemme : *(5)*

La suite (v_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Preuve :

Notons (u'_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u'_n=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$$

Les termes de la suite u_n peuvent s'exprimer par :

$$u'_n=\left(1+\frac{-x}{n}\right)^n$$

D'après le lemme 4, la suite (u'_n) est croissanteà partir d'un rang N. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :

$$u'_n\leqslant u'_{n+1}$$

A partir du rang N, on a : $u'_n>0$

$$\frac{1}{u'_n}\geqslant\frac{1}{u'_{n+1}}$$
$$\frac{1}{\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n}\geqslant\frac{1}{\left(1-\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}}$$
$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}\geqslant\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$
$$v_n\geqslant v_{n+1}$$

On en déduit que la suite (v_n) est décroissante.

Proposition :

Soit x un nombre réel quelconque. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n :

$$u_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad ; \quad v_n=\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Démonstration :

Etablissons les trois propriétés définissant deux suites adjacentes :

- la suite (u_n) est croissante à partir d'un rang N.
- la suite (v_n) est décroissante à partir d'un rang N'.
- Etudions la différence :
  $$v_n-u_n=\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$
  $$=\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$$
  $$=v_n{\cdot}\left[1-\left[1^2-\left(\frac{x}{n}\right)^2\right]^n\right]=v_n{\cdot}\left[1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right]$$
  - Pour tout entier naturel n tel que $n\geqslant N$, on a :
    $$\begin{array}{rcl}
    -1\leqslant & \dfrac{x}{n} & \leqslant 1\\
    0\leqslant & \left(\dfrac{x}{n}\right)^2 & \leqslant 1\\
    0\leqslant & \dfrac{x^2}{n^2} & \leqslant 1\\
    0\geqslant & -\dfrac{x^2}{n^2} & \geqslant -1\\
    1\geqslant & 1-\dfrac{x^2}{n^2} & \geqslant 0\\
    1\geqslant & \left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n & \geqslant 0\\
    1\geqslant & \left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n & \geqslant 0\\
    -1\leqslant & -\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n & \leqslant 0\\
    0\leqslant & 1-\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n & \leqslant 1\\
    0\leqslant & 1-\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n & \leqslant 1
    \end{array}$$
    A partir du rang N, on a : $v_n\geqslant 0$
    $$0\leqslant v_n{\cdot}\left[1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right]$$
  - A partir d'un rang N'', on a : $-1\leqslant-\dfrac{x^2}{n^2}\leqslant 0$, d'après le lemme de Bernoulli, on en déduit :
    $$\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\leqslant 1-n{\cdot}\frac{x^2}{n^2}$$
    $$\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\geqslant 1-\frac{x^2}{n}$$
    $$-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\leqslant\frac{x^2}{n}-1$$
    $$1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\leqslant 1+\frac{x^2}{n}-1$$
    $$1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\leqslant\frac{x^2}{n}$$
    $$v_n{\cdot}\left[1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right]\leqslant v_n{\cdot}\frac{x^2}{n}$$
    La suite (v_n) est décroissante :
    $$v_n{\cdot}\left[1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right]\leqslant v_0{\cdot}\frac{x^2}{n}$$
  Ainsi, à partir d'un certain rang, on a l'encadrement :
  $$0\leqslant v_n-u_n\leqslant v_0{\cdot}\frac{x^2}{n}$$
  Ayant la limite $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}v_0{\cdot}\dfrac{x^2}{n}=0$, par application du théorème des gendarmes, on a :
  $$\lim_{n\mapsto+\infty}v_n-u_n=0$$

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Corollaire :

Pour tout nombre réel x, la suite (u_n) associée converge.

Définition :

La fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x)=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

s'appelle la **fonction exponentielle**

B. Propriété :

Proposition :

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve :

Considérons deux nombres a et b quelconque de $\mathbb{R}$ tels que $a<b$. On a les comparaisons suivantes :

$$a < b$$

Pour n entier strictement positif :

$$\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$$

$$1+\frac{a}{n} < 1+\frac{b}{n}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction puissance est croissante :

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n < \left(1+\frac{b}{n}\right)^n$$

Par passage à la limite, on a :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \leqslant \lim_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)^n$$

$$\exp(a) \leqslant \exp(b)$$

Deux nombres et leurs images par la fonction exponentielle sont comparés dans le même ordre : la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Lemme : *(6)*

Pour n un entier naturel strictement positif, on considère la fonction $f_n(x)$ définie sur par :

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

On a la limite : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} f'_n(x) = \exp(x)$

Preuve :

Pour n entier naturel strictement positif, la fonction f_n est la composé d'une fonction affine par la puissance d'exposant n :

$$f'_n(x)=\frac{1}{n}\cdot\left[n\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\right]=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}=\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{1+\frac{x}{n}}$$

On a les deux limites :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x) \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} 1+\frac{x}{n} = 1$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} f'_n(x) = \exp(x)$

Théorème : *(accroissement finis - admis)*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$ telle que :

$$m \leqslant f'(x) \leqslant M \quad \text{où } m,M\in\mathbb{R}$$

Alors, on a pour tout $x\in[a\,;b]$:

$$m\cdot(x-a) \leqslant f(x)-f(a) \leqslant M\cdot(x-a)$$

Lemme : *(7)*

Soit x un nombre réel et n un entier naturel tel que $n>|x|$.
Pour tout nombre réel h, on a :

$$h\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h)-\exp(x) \leqslant h\cdot\exp(x+h)$$

Démonstration :

Considérons la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

D'après le lemme 6., on a :

$$f'_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

La fonction f'_n est définie par la composée d'une fonction affine par une fonction puissance. On en déduit l'expression de la dérivée seconde de la fonction f_n :

$$f''_n(x) = \frac{1}{n}\cdot\left[(n-1)\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-2}\right] = \frac{n-1}{n}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-2}$$

Pour n suffisamment grand $(n>|x|)$, la fonction $f''_n(x)$ est positive. On en déduit que la fonction f'_n est croissante.

Faisons une disjonction de cas sur le signe de h :

- Pour $h>0$ et pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[x\,;x+h]$, on a :

  $$x \leqslant t \leqslant x+h$$

  Pour n suffisamment grand, f'_n croissante sur $[x\,;x+h]$:

  $$f'_n(x) \leqslant f'_n(t) \leqslant f'_n(x+h)$$

  D'après le théorème des accroissement finis, on a :

  $$f'_n(x)\cdot[(x+h)-x] \leqslant f_n(x+h)-f_n(x) \leqslant f'_n(x+h)\cdot[(x+h)-x]$$

  $$h\cdot f'_n(x) \leqslant f_n(x+h)-f_n(x) \leqslant h\cdot f'_n(x+h)$$

  Par passage à la limite :

  $$h\cdot\exp(x)\leqslant\exp(x+h)-\exp(x)\leqslant h\cdot\exp(x+h)$$

- Pour $h<0$ et pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[x+h\,;x]$, on a :

  $$x+h \leqslant t \leqslant x$$

  Pour n suffisamment grand, f'_n croissante sur $[x\,;x+h]$:

  $$f'_n(x+h) \leqslant f'_n(t) \leqslant f'_n(x)$$

  D'après le théorème des accroissement finis, on a :

  $$f'_n(x+h)\cdot[x-(x+h] \leqslant f_n(x)-f_n(x+h) \leqslant f'_n(x)\cdot[x-(x+h)]$$

  $$-h\cdot f'_n(x+h) \leqslant f_n(x)-f_n(x+h) \leqslant -h\cdot f'_n(x)$$

  $$h\cdot f'_n(x+h) \geqslant -f_n(x)+f_n(x+h) \geqslant h\cdot f'_n(x)$$

  $$h\cdot f'_n(x) \leqslant f_n(x+h)-f_n(x) \leqslant h\cdot f'_n(x+h)$$

Ainsi, pour tout nombre réel h et pour n suffisamment grand, on a l'encadrement :

$$h\cdot f'_n(x) \leqslant f_n(x+h)-f_n(x) \leqslant h\cdot f'_n(x+h)$$

Par passage à la limite :

$$h\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h)-\exp(x) \leqslant h\cdot\exp(x+h)$$

Lemme : *(8)*

Pour tout nombre réel x et pour h un nombre réel tel que $h<1$:

$$(1+h)\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h) \leqslant \frac{\exp(x)}{1-h}$$

Preuve :

Pour tout nombre réel et pour $h<1$, on a :

$$h\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h)-\exp(x) \leqslant h\cdot\exp(x+h)$$

$$h\cdot\exp(x)+\exp(x) \leqslant \exp(x+h) \leqslant h\cdot\exp(x+h)+\exp(x)$$

$$(h+1)\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h) \leqslant h\cdot\exp(x+h)+\exp(x)$$

D'après le lemme 7, on a la comparaison :

$$\exp(x+h)-\exp(x) \leqslant h\cdot\exp(x+h)$$

$$\exp(x+h)-h\cdot\exp(x+h) \leqslant \exp(x)$$

$$(1-h)\cdot\exp(x+h) \leqslant \exp(x)$$

Comme $h<1 \implies 1-h>0$:

$$\exp(x+h) \leqslant \frac{1}{1-h}\cdot\exp(x)$$

Ainsi, on a la comparaison :

$$(h+1)\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h) \leqslant h\cdot\exp(x+h)+\exp(x)$$

$$(h+1)\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h) \leqslant h\cdot\frac{1}{1-h}\cdot\exp(x)+\exp(x)$$

$$(h+1)\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h) \leqslant \frac{h}{1-h}\cdot\exp(x)+\exp(x)$$

$$(h+1)\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h) \leqslant \left(\frac{h}{1-h}+1\right)\cdot\exp(x)$$

$$(h+1)\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h) \leqslant \frac{h+(1-h)}{1-h}\cdot\exp(x)$$

$$(h+1)\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h) \leqslant \frac{1}{1-h}\cdot\exp(x)$$

Proposition :

La fonction exponentielle est continue.

Preuve :

Du lemme 8, pour $h<1$, on a l'encadrement :

$$(h+1)\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h) \leqslant \frac{1}{1-h}\cdot\exp(x)$$

Par passage à la limite et le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{h\mapsto0}\exp(x+h) = \exp(x)$$

Proposition :

La fonction exponentielle est dérivable et admet pour dérivée elle-même

Preuve :

Du lemme 7, on a l'encadrement :

$$h\cdot\exp(x) \leqslant \exp(x+h)-\exp(x) \leqslant h\cdot\exp(x+h)$$

Pour $h\neq0$, on a :

$$\exp(x) \leqslant \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} \leqslant \exp(x+h)$$

Par passage à la limite et le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{h\mapsto0}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = exp(x)$$

On en déduit : $(\exp)'(x) = \exp(x)$