Proposition :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- La fonction $u{+}v$ définie pour tout $x\in I$ par :
  $$u{+}v : x \longmapsto u(x)+v(x)$$
  est une fonction dérivable sur I où :
  $$\big(u{+}v\big)'(x) = u'(x)+v'(x)$$
- La fonction $u{-}v$ définie pour tout $x\in I$ par :
  $$u{-}v : x \longmapsto u(x)-v(x)$$
  est une fonction dérivable sur I où :
  $$\big(u{-}v\big)'(x) = u'(x)-v'(x)$$
- Pour $k\in\mathbb{R}$ et $x\in I$, la fonction $k{\cdot}u$ définie par :
  $$k{\cdot}u : x \longmapsto k\times u(x)$$
  est une fonction dérivable sur I où :
  $$\big(k{\cdot}u\big)'(x) = k\times u'(x)$$

Preuve :

- Soit f la fonction définie sur I par la somme des fonctions u et v.

  Le nombre dérivé de la fonction f pour $x\in I$ est, par définition, la valeur de la limite :
  $$\begin{aligned}\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(x{+}h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{\big(u{+}v\big)(x{+}h)-\big(u{+}v\big)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{\big[u(x{+}h)+v(x{+}h)\big]-\big[u(x)+v(x)\big]}{h}\\ &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x{+}h)+v(x{+}h)-u(x)-v(x)}{h}\\ &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x{+}h)-u(x)+v(x{+}h)-v(x)}{h}\\ &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x{+}h)-u(x)}{h}+\lim_{h\mapsto 0}\frac{v(x{+}h)-v(x)}{h}\\ &= u'(x)+v'(x)\end{aligned}$$
- Soit f la fonction définie sur I par la somme des fonctions u et v.

  Le nombre dérivé de la fonction f pour $x\in I$ est, par définition, la valeur de la limite :
  $$\begin{aligned}\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(x{+}h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{\big(u{-}v\big)(x{+}h)-\big(u{-}v\big)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{\big[u(x{+}h)-v(x{+}h)\big]-\big[u(x)-v(x)\big]}{h}\\ &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x{+}h)-v(x{+}h)-u(x)+v(x)}{h}\\ &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x{+}h)-u(x)-v(x{+}h)+v(x)}{h}\\ &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{\big[u(x{+}h)-u(x)-\big[v(x{+}h)-v(x)\big]}{h}\\ &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x{+}h)-u(x)}{h}-\lim_{h\mapsto 0}\frac{v(x{+}h)-v(x)}{h}\\ &= u'(x)-v'(x)\end{aligned}$$
- Soit f la fonction définie sur I par le produit de la fonction u par le nombre réel k

  Le nombre dérivé de la fonction f pour $x\in\mathbb{I}$ est, par définition, la valeur de la limite :
  $$\begin{aligned}\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(x{+}h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{\big(k{\cdot}u\big)(x{+}h)-\big(k{\cdot}u\big)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\mapsto 0}\frac{k{\cdot}u(x{+}h)-k{\cdot}u(x)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{k{\cdot}\big[u(x{+}h)-u(x)\big]}{h}\\ &= \lim_{h\mapsto 0}k{\cdot}\frac{u(x{+}h)-u(x)}{h} = k{\cdot}\left[\lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x{+}h)-u(x)}{h}\right]\\ &= k{\cdot}u'(x)\end{aligned}$$