Proposition :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel ($k\in\mathbb{R}$).
La fonction $k{\cdot}u$ définie pour tout x par :

$$k{\cdot}u\,;\, x \longmapsto k{\cdot}u(x)$$

est une fonction dérivable sur I où :

$$\big(k{\cdot}u\big)'(x) = k{\cdot}u'(x)$$

Preuve :

Soit f la fonction définie sur I par le produit de la fonction u par le nombre réel k

Le nombre dérivé de la fonction f pour $x\in\mathbb{I}$ est, par définition, la valeur de la limite :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{(k{\cdot}u)(x+h)-(k{\cdot}u)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\mapsto 0}\frac{k{\cdot}u(x+h)-k{\cdot}u(x)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{k{\cdot}\big[u(x+h)-u(x)\big]}{h}$$

$$= \lim_{h\mapsto 0}k{\cdot}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = k{\cdot}\left[\lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]$$

$$= k{\cdot}u'(x)$$

CC BY-NC