Proposition :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
La fonction $u+v$ définie pour tout x par :

$$u+v ; x \longmapsto u(x)+v(x)$$

est une fonction dérivable sur I où :

$$\big(u+v\big)'(x) = u'(x)+v'(x)$$

Preuve :

Soit f la fonction définie sur I par la somme des fonctions u et v.

Le nombre dérivé de la fonction f pour $x \in I$ est, par définition, la valeur de la limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\mapsto 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\mapsto 0} \frac{\big(u+v\big)(x+h)-\big(u+v\big)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\mapsto 0} \frac{\big[u(x+h)+v(x+h)\big]-\big[u(x)+v(x)\big]}{h} \\
&= \lim_{h\mapsto 0} \frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\mapsto 0} \frac{u(x+h)-u(x)+v(x+h)-v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\mapsto 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\mapsto 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \\
&= u'(x)+v'(x)
\end{aligned}$$