

Proposition :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

La fonction $u-v$ définie pour tout x par :

$$u-v; x \mapsto u(x) - v(x)$$

est une fonction dérivable sur I où :

$$(u-v)'(x) = u'(x) - v'(x)$$

Preuve :

Soit f la fonction définie sur I par la somme des fonctions u et v .

Le nombre dérivé de la fonction f pour $x \in I$ est, par définition, la valeur de la limite :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u-v)(x+h) - (u-v)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) - v(x+h)] - [u(x) - v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - v(x+h) - u(x) + v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x) - v(x+h) + v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) - u(x)] - [v(x+h) - v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ &= u'(x) - v'(x) \end{aligned}$$