## *Fonctions affines*

On considère la fonction affine $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto m \cdot x + p \quad \text{où } m, p \in \mathbb{R}$$

Soit $x_0$ un nombre réel, on a les transformations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{m \cdot (x_0 + h) + p - (m \cdot x_0 + p)}{h} \\ &= \frac{m \cdot x_0 + m \cdot h + p - m \cdot x_0 - p}{h} = \frac{m \cdot h}{h} \\ &= m \end{aligned}$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = m$$

Ainsi, en tout nombre une fonction affine admet pour nombre dérivé la valeur $m$ de son coefficient directeur. Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ et est constante :

$$f' : x \longmapsto m$$

## *Fonctions carrés*

On considère la fonction carré $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \longmapsto x^2$$

Soit $x_0$ un nombre réel, on a les transformations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} &= \frac{(x_0 + h)^2 - {x_0}^2}{h} \\ &= \frac{{x_0}^2 + 2 \cdot x_0 \cdot h + h^2 - {x_0}^2}{h} = \frac{2 \cdot x_0 \cdot h + h^2}{h} \\ &= 2 \cdot x_0 + h \end{aligned}$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} 2 \cdot x_0 + h = 2 \cdot x_0$$

Ainsi, pour tout nombre réel $x_0$, la fonction carré admet un nombre dérivé en $x_0$ égal à $2 \cdot x_0$. La fonction dérivée de la fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g' : x \longmapsto 2x$$

## *La fonction inverse*

On considère la fonction $k$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$k : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Soit $x_0$ un nombre réel non nul, on a les transformations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{k(x_0+h) - k(x_0)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{x_0 + h} - \dfrac{1}{x_0}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{x_0}{(x_0 + h) \cdot x_0} - \dfrac{x_0 + h}{x_0 \cdot (x_0 + h)}}{h} = \frac{\dfrac{x_0 - (x_0 + h)}{(x_0 + h) \cdot x_0}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{-h}{(x_0 + h) \cdot x_0}}{h} = \frac{-h}{x_0^2 + h \cdot x_0} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{x_0^2 + h \cdot x_0} \end{aligned}$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{k(x_0+h) - k(x_0)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{-1}{x_0^2 + h \cdot x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

Ainsi, pour tout nombre réel $x_0$ appartenant à $\mathbb{R}^*$, la fonction inverse admet un nombre dérivé en $x_0$ égal à $-\dfrac{1}{{x_0}^2}$. La fonction dérivée de la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$k' : x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$$

## *La fonction racine carrée*

Soit $\ell$ la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\ell : x \longmapsto \sqrt{x}$$

Soit $x_0$ un nombre réel, on a les transformations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\ell(x_0+h) - \ell(x_0)}{h} &= \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)}{h \cdot \left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x_0 + h}\right)^2 - \left(\sqrt{x_0}\right)^2}{h \cdot \left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{x_0 + h - x_0}{h \cdot \left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)} \\ &= \frac{h}{h \cdot \left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

On en déduit la limite suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{h \mapsto 0} \frac{\ell(x_0+h) - \ell(x_0)}{h} &= \lim_{h \mapsto 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout nombre réel $x_0$ appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, la fonction racine carrée admet un nombre dérivé en $x_0$ égal à $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$. La fonction dérivée de la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\ell' : x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$