On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$k : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Soit x_0 un nombre réel non nul, on a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{k(x_0+h)-k(x_0)}{h} = \frac{\dfrac{1}{x_0+h}-\dfrac{1}{x_0}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{x_0}{(x_0+h)\cdot x_0}-\dfrac{x_0+h}{x_0\cdot(x_0+h)}}{h} = \frac{\dfrac{x_0-(x_0+h)}{(x_0+h)\cdot x_0}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{-h}{(x_0+h)\cdot x_0}}{h} = \frac{-h}{x_0^2+h\cdot x_0}\times\frac{1}{h} = \frac{-1}{x_0^2+h\cdot x_0}$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{h\to 0}\frac{k(x_0+h)-k(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x_0^2+h\cdot x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

Ainsi, pour tout nombre réel x_0 appartenant à $\mathbb{R}^*$, la fonction inverse admet un nombre dérivé en x_0 égal à $-\dfrac{1}{x_0^2}$.

La fonction dérivée de la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$k' : x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$$