Second degré: factorisation, variations

A. Sens de variations:

1. Proposition:

Proposition:

Soit f une fonction du second degré:

- $a<0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$a\cdot x^2+b\cdot x+c$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2\cdot a}\right)$	$\searrow$

- $a>0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$a\cdot x^2+b\cdot x+c$	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2\cdot a}\right)$	$\nearrow$

Preuve:

Soit f une fonction du second degré définie par:

$$f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \quad a\neq 0$$

La forme canonique de la fonction f admet pour expression:

$$f(x) = a\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2 - \frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}$$

- **Pour $a<0$:** et sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2\cdot a}\right]$, démontrons le sens de variation:

  Pour tout nombre x_1 et x_2 appartenant à l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2\cdot a}\right]$ tels que $x_1<x_2$, on a:

  $$x_1 < x_2 < -\frac{b}{2\cdot a}$$
  $$x_1+\frac{b}{2\cdot a} < x_2+\frac{b}{2\cdot a} < 0$$

  La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$:

  $$\left(x_1+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2 > \left(x_2+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2$$

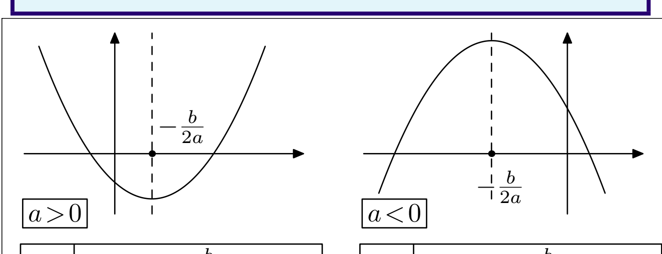
  Le nombre a est strictement négatif:

  $$a\cdot\left(x_1+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2 > a\cdot\left(x_2+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2$$
  $$a\cdot\left(x_1+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2 - \frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a} > a\cdot\left(x_2+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2 - \frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}$$
  $$f(x_1) < f(x_2)$$

  Deux nombres de l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2\cdot a}\right]$ et leurs images par la fonction f sont comparés dans le même sens: la fonction f est croissante sur cet intervalle.

- Les autres cas se démontrent de la même façon.

2. Illustration:



x	-∞	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variation $a\cdot x^2+b\cdot x+c$	$+\infty$ $\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$ $+\infty$

x	-∞	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variation $a\cdot x^2+b\cdot x+c$	-∞ $\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$ -∞

B. Factorisation:

Corollaire:

On considère un polynôme $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ du second degré $(a\neq 0)$. L'étude des racines d'un polynôme se fait par disjonction de cas sur la valeur du discriminant Δ:

- Si $\Delta<0$, le polynôme n'admet **aucune** forme factorisée.
- Si $\Delta=0$, le polynôme admet pour forme factorisée:
  $$a\cdot x^2+b\cdot x+c = a\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2$$
- Si $\Delta>0$, le polynôme admet pour forme factorisée:
  $$a\cdot x^2+b\cdot x+c = a\cdot(x-x_1)(x-x_2)$$
  où x_1 et x_2 sont les deux racines du polynômes.

Preuve:

- Etude du cas $\Delta<0$:
  On effectue un raisonnement par l'absurde: partons de l'hypothèse que ce polynôme admette une forme factorisée. C'est à dire qu'il existe deux polynômes P et Q de degrés 1 tels que: $a\cdot x^2+b\cdot x+c=P\times Q$
  Or, pour que le produit $P\times Q$ soit un polynôme de degré 2, il est nécessaire que P et Q soit deux polynômes de degré 1:
  $$P=\alpha\cdot x+\beta \quad ; \quad Q=\alpha'\cdot x+\beta'$$
  On en déduit la forme factorisée:
  $$a\cdot x^2+b\cdot x+d = (\alpha\cdot x+\beta)\cdot(\alpha'\cdot x+\beta')$$
  Intéressons-nous à l'équation suivante:
  $$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$
  $$(\alpha\cdot x+\beta)\cdot(\alpha'\cdot x+\beta')=0$$
  Sachant qu' "*Un produit étant nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul*", on en déduit que le polynôme $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ admet deux racines $\left(\frac{-\beta}{\alpha} \text{ et } \frac{-\beta}{\alpha}\right)$.

  Ce qui est absurde puisque, lorsque $\Delta<0$, le polynôme $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ n'admet aucune racine.
  Ainsi, l'hypothèse de départ est fausse: le polynôme $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ n'admet pas de forme factorisée.

- Etude du cas $\Delta=0$:
  La forme canonique permet d'écrire:
  $$a\cdot x^2+b\cdot x+c = a\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}$$
  $$= a\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\frac{\Delta}{4\cdot a} = a\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\frac{0}{4\cdot a} = a\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2$$

- Etude du cas $\Delta>0$:
  On peut écrire: $\left(\sqrt{\Delta}\right)^2=\Delta$

  En partant de la forme canonique d'un polynôme du second degré, on a:
  $$a\cdot x^2+b\cdot x+c = a\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a} = a\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\frac{\Delta}{4\cdot a}$$
  $$=\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\cdot a} = a\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\cdot a^2}\right]$$
  $$= a\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{(2\cdot a)^2}\right] = a\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)^2\right]$$
  $$= a\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)\left(x+\frac{b}{2\cdot a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)$$
  $$= a\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right) = a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right)$$
  On reconnait les deux racines x_1 et x_2 du polynôme:
  $$= a\cdot(x-x_1)(x-x_2)$$

C. Etude du signe:

1. Proposition:

Proposition:

Soit $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ un polynôme du second degré $(a\neq 0)$, l'étude du signe du polynôme dépend de la valeur de son discriminant:

- $\Delta<0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$a\cdot x^2+b\cdot x+c$	Signe de a	

- $\Delta=0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2\cdot a}$		$+\infty$
$a\cdot x^2+b\cdot x+c$		Signe de a	0	Signe de a	

- $\Delta>0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$a\cdot x^2+b\cdot x+c$		Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a	

où x_1 et x_2 sont les deux racines du polynôme.

Preuve:

On considère un polynôme du second degré écrit sous la forme: $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ où $a\neq 0$

- $\Delta<0$: le polynôme admet la forme canonique:
  $$a\cdot x^2+b\cdot x+c = a\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\frac{\Delta}{4\cdot a^2}\right] \quad (*)$$
  On a les comparaisons:
  $$\Delta<0 \implies -\frac{\Delta}{4\cdot a^2}>0 \implies \left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\frac{\Delta}{4\cdot a^2}>0$$
  Ainsi, le signe de $(*)$ ne dépend que du signe de a.

x	$-\infty$	$+\infty$
$a\cdot x^2+b\cdot x+c$	Signe de a	

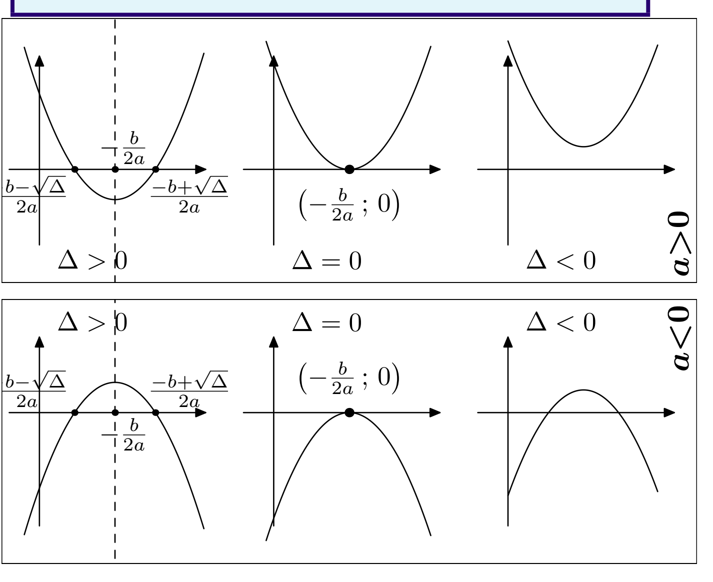
- $\Delta=0$: on a: $a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2$
  On obtient le tableau de signe:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2\cdot a}$		$+\infty$
$a\cdot x^2+b\cdot x+c$		Signe de a	0	Signe de a	

- $\Delta>0$: en notant x_1 et x_2 les deux racines du polynômes, on a la factorisation:
  $$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$
  On obtient le tableau de signe:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		Signe de a		Signe de a		Signe de a	
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$a\cdot x^2+b\cdot x+c$		Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a	

2. Illustration:



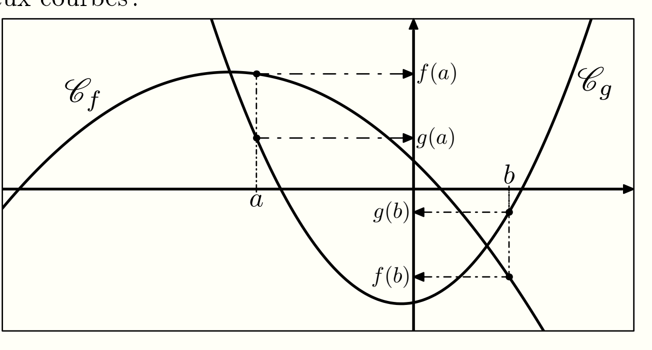
3. Position relative de courbes:

Exemple:

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par:

$$f(x)=-2\cdot x^2-5x+1 \quad ; \quad g(x)=6\cdot x^2+x-4$$

Ci-dessous est donnée la représentation graphique de ces deux courbes:



On remarque les deux positions relatives de ces deux courbes:

- Relativement à la droite d'équation $x=a$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.
- Relativement à la droite d'équation $x=b$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Résolvons l'inéquation:

$$f(x)>g(x)$$
$$-2\cdot x^2-5x+1>6\cdot x^2+x-4$$
$$-8\cdot x^2-6\cdot x+5>0$$

Le polynôme du membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur:

$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-6)^2-4\times(-8)\times 5=36+160=196$$

On a la simplification: $\sqrt{\Delta}=\sqrt{196}=14$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{1}{2} \quad \Big| \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=-\frac{5}{4}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on obtient le tableau de signe ci-dessous:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-8\cdot x^2-6\cdot x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:

- Sur $\left]-\infty\,;-\frac{5}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, on a la comparaison: $f(x)\leqslant g(x)$
  On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.
- Sur $\left[-\frac{5}{4}\,;\frac{1}{2}\right]$, on a la comparaison: $f(x)\geqslant g(x)$
  on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

