Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire prenant n valeurs notées x_1, x_2, ..., x_n.
On note p_i la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)$.

Soit a et b deux nombres réels, alors on a :
$$E(a\cdot\mathcal{X}+b) = a\cdot E(\mathcal{X})+b \quad ; \quad V(a\cdot\mathcal{X}) = a^2\cdot V(\mathcal{X})$$

Preuve :

Notons $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire définie par :
$$\mathcal{Y} = a\cdot\mathcal{X}+b$$
La variable aléatoire $\mathcal{Y}$ prend les n valeurs suivantes :
$$a\cdot x_1+b \quad ; \quad a\cdot x_2+b \quad ; \quad \dots \quad ; \quad a\cdot x_n+b$$
qu'on note respectivement y_1, y_2, ..., y_n.

- Par définition de l'espérance d'une variable aléatoire, on a :
$$\begin{aligned}
E(\mathcal{Y}) &= \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\mathcal{P}(\mathcal{Y}{=}y_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\mathcal{P}\Big(a\cdot\mathcal{X}{+}b{=}a\cdot x_i{+}b\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i) = \sum_{i=1}^{n}(a\cdot x_i+b)\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big[a\cdot x_i\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)+b\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\Big]\\
&= \sum_{i=1}^{n} a\cdot x_i\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)+\sum_{i=1}^{n} b\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)
\end{aligned}$$
  Par factorisation du facteur a dans la première somme et du facteur b dans la seconde somme :
$$\begin{aligned}
&= a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)+b\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\\
&= a\cdot E(\mathcal{X})+b\times 1 = a\cdot E(\mathcal{X})+b
\end{aligned}$$
- Par définition de la variable d'une variable aléatoire, on a :
$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{Y}) &= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{Y}{=}y_i)\cdot\big[y_i-E(\mathcal{Y})\big]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(a\cdot\mathcal{X}+b{=}a\cdot x_i+b)\cdot\big[y_i-E(\mathcal{Y})\big]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot\big[y_i-E(\mathcal{Y})\big]^2
\end{aligned}$$
  D'après le point précédent :
$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot\Big[a\cdot x_i+b-\big[a\cdot E(\mathcal{X})+b\big]\Big]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot\big[a\cdot x_i+b-a\cdot E(\mathcal{X})-b\big]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot\big[a\cdot x_i-a\cdot E(\mathcal{X})\big]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot\Big[a\cdot\big[x_i-E(\mathcal{X})\big]\Big]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot a^2\cdot\big[x_i-E(\mathcal{X})\big]^2
\end{aligned}$$
  Par factorisation du facteur a^2 de chaque terme de la somme, on a :
$$= a^2\cdot\Big[\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot\Big[[x_i-E(\mathcal{X})]\Big]^2 = a^2\cdot V(\mathcal{X})$$

Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire prenant n valeurs notées x_1, x_2, ..., x_n.
On note p_i la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)$.

Soit a et b deux nombres réels, alors on a :
$$E(a\cdot\mathcal{X}+b) = a\cdot E(\mathcal{X})+b \quad ; \quad V(a\cdot\mathcal{X}) = a^2\cdot V(\mathcal{X})$$

Preuve :

Notons $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire définie par :
$$\mathcal{Y} = a\cdot\mathcal{X}+b$$
La variable aléatoire $\mathcal{Y}$ prend les n valeurs suivantes :
$$a\cdot x_1+b \quad ; \quad a\cdot x_2+b \quad ; \quad \dots \quad ; \quad a\cdot x_n+b$$
qu'on note respectivement y_1, y_2, ..., y_n.

- Par définition de l'espérance d'une variable aléatoire, on a :
$$\begin{aligned}
E(\mathcal{Y}) &= \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\mathcal{P}(\mathcal{Y}{=}y_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\mathcal{P}\Big(a\cdot\mathcal{X}{+}b{=}a\cdot x_i{+}b\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i) = \sum_{i=1}^{n}(a\cdot x_i+b)\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big[a\cdot x_i\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)+b\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\Big]\\
&= \sum_{i=1}^{n} a\cdot x_i\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)+\sum_{i=1}^{n} b\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)
\end{aligned}$$
  Par factorisation du facteur a dans la première somme et du facteur b dans la seconde somme :
$$\begin{aligned}
&= a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)+b\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\\
&= a\cdot E(\mathcal{X})+b\times 1 = a\cdot E(\mathcal{X})+b
\end{aligned}$$
- Par définition de la variable d'une variable aléatoire, on a :
$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{Y}) &= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{Y}{=}y_i)\cdot\big[y_i-E(\mathcal{Y})\big]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(a\cdot\mathcal{X}+b{=}a\cdot x_i+b)\cdot\big[y_i-E(\mathcal{Y})\big]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot\big[y_i-E(\mathcal{Y})\big]^2
\end{aligned}$$
  D'après le point précédent :
$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot\Big[a\cdot x_i+b-\big[a\cdot E(\mathcal{X})+b\big]\Big]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot\big[a\cdot x_i+b-a\cdot E(\mathcal{X})-b\big]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot\big[a\cdot x_i-a\cdot E(\mathcal{X})\big]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot\Big[a\cdot\big[x_i-E(\mathcal{X})\big]\Big]^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot a^2\cdot\big[x_i-E(\mathcal{X})\big]^2
\end{aligned}$$
  Par factorisation du facteur a^2 de chaque terme de la somme, on a :
$$= a^2\cdot\Big[\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}x_i)\cdot\Big[[x_i-E(\mathcal{X})]\Big]^2 = a^2\cdot V(\mathcal{X})$$