Exercice

On considère l'inéquation :

(E): $\ln(x{+}1) \leqslant \ln(2{-}x)$

1. Donner la plus grande partie I de $\mathbb{R}$ sur laquelle les deux expressions $\ln(x{+}1)$ et $\ln(2{-}x)$ sont définies.

2. Résoudre l'inéquation (E).

Correction

1. Le plus grand ensemble sur lequel les deux membres de cette inéquation sont définies, est l'intervalle $\big[-1\,;2\big]$.
On dira que cette inéquation admet pour ensemble de résolution l'intervalle $\big]-1\,;2\big[$.

2. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned}\ln\big(x{+}1\big) &\leqslant \ln\big(2{-}x\big)\\ \ln\big(x{+}1\big)\text{-}\ln\big(2\text{-}x\big) &\leqslant 0\\ \ln\Big(\frac{x+1}{2-x}\Big) &\leqslant 0\\ \ln\Big(\frac{x+1}{2-x}\Big) &\leqslant \ln(1)\\ \ln\Big(\frac{x+1}{2-x}\Big) &\leqslant \ln(1)\end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}e^{\ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)} &\leqslant e^{\ln(1)}\\ \frac{x+1}{2-x} &\leqslant 1\\ \frac{x+1}{2-x}-1 &\leqslant 0\\ \frac{x+1-(2-x)}{2-x} &\leqslant 0\\ \frac{x+1-2+x}{2-x} &\leqslant 0\\ \frac{2x+1}{2-x} &\leqslant 0\end{aligned}$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x+1}{2-x}$			‖	$-$	0	$+$	‖		

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle :

$I = \Big[\frac{1}{2}\,;2\Big[$

Exercice

On considère l'inéquation :

(E): $\ln(x{+}1) \leqslant \ln(2{-}x)$

1. Donner la plus grande partie I de $\mathbb{R}$ sur laquelle les deux expressions $\ln(x{+}1)$ et $\ln(2{-}x)$ sont définies.

2. Résoudre l'inéquation (E).

Correction

1. Le plus grand ensemble sur lequel les deux membres de cette inéquation sont définies, est l'intervalle $\big[-1\,;2\big]$.
On dira que cette inéquation admet pour ensemble de résolution l'intervalle $\big]-1\,;2\big[$.

2. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned}\ln\big(x{+}1\big) &\leqslant \ln\big(2{-}x\big)\\ \ln\big(x{+}1\big)\text{-}\ln\big(2\text{-}x\big) &\leqslant 0\\ \ln\Big(\frac{x+1}{2-x}\Big) &\leqslant 0\\ \ln\Big(\frac{x+1}{2-x}\Big) &\leqslant \ln(1)\\ \ln\Big(\frac{x+1}{2-x}\Big) &\leqslant \ln(1)\end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}e^{\ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)} &\leqslant e^{\ln(1)}\\ \frac{x+1}{2-x} &\leqslant 1\\ \frac{x+1}{2-x}-1 &\leqslant 0\\ \frac{x+1-(2-x)}{2-x} &\leqslant 0\\ \frac{x+1-2+x}{2-x} &\leqslant 0\\ \frac{2x+1}{2-x} &\leqslant 0\end{aligned}$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x+1}{2-x}$			‖	$-$	0	$+$	‖		

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle :

$I = \Big[\frac{1}{2}\,;2\Big[$

Exercice

On considère l'inéquation :

(E): $\ln(x{+}1) \leqslant \ln(2{-}x)$

1. Donner la plus grande partie I de $\mathbb{R}$ sur laquelle les deux expressions $\ln(x{+}1)$ et $\ln(2{-}x)$ sont définies.

2. Résoudre l'inéquation (E).

Correction

1. Le plus grand ensemble sur lequel les deux membres de cette inéquation sont définies, est l'intervalle $\big[-1\,;2\big]$.
On dira que cette inéquation admet pour ensemble de résolution l'intervalle $\big]-1\,;2\big[$.

2. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned}\ln\big(x{+}1\big) &\leqslant \ln\big(2{-}x\big)\\ \ln\big(x{+}1\big)\text{-}\ln\big(2\text{-}x\big) &\leqslant 0\\ \ln\Big(\frac{x+1}{2-x}\Big) &\leqslant 0\\ \ln\Big(\frac{x+1}{2-x}\Big) &\leqslant \ln(1)\\ \ln\Big(\frac{x+1}{2-x}\Big) &\leqslant \ln(1)\end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}e^{\ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)} &\leqslant e^{\ln(1)}\\ \frac{x+1}{2-x} &\leqslant 1\\ \frac{x+1}{2-x}-1 &\leqslant 0\\ \frac{x+1-(2-x)}{2-x} &\leqslant 0\\ \frac{x+1-2+x}{2-x} &\leqslant 0\\ \frac{2x+1}{2-x} &\leqslant 0\end{aligned}$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x+1}{2-x}$			‖	$-$	0	$+$	‖		

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle :

$I = \Big[\frac{1}{2}\,;2\Big[$