Propriété :

La fonction logarithme népérien sur $\left]0\,;+\infty\right[$:

$\left(\ln\right)'(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

Preuve :

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = e^{\ln x}$.
Or, $f(x) = x$. La formule de dérivation d'une composée donne :

$$\begin{array}{r|l} f(x) = x & \left(\ln\right)'(x) \times x = 1 \\ f'(x) = 1 & \left(\ln\right)'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \left(\ln\right)'(x) \times e^{\ln x} = 1 & \end{array}$$

Corollaire :

On a la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{\ln\left(1+x\right)}{x} = \ln'(1) = 1$

Proposition :

- La fonction logarithme népérien est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \ln x = +\infty$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \ln x = -\infty$

Preuve :

- On a $\left(\ln\right)'(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est positif sur $\mathbb{R}_+^*$: la fonction logarithme népérien est croissante.
- Soit M un réel positif. Puisque $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > a$:
$$x > e^M \implies \ln x > \ln e^M \implies \ln x > M.$$
Pour tout réel M, il existe un intervalle $\left[a\,;+\infty\right[$ tel que la fonction logarithme soit supérieur à M :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} \ln x = +\infty$$
- Posons $x = \dfrac{1}{X}$. On a : $x \mapsto 0^+ \iff X \longmapsto +\infty$.
$$\lim_{x\mapsto 0^+} \ln x = \lim_{x\mapsto+\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\mapsto+\infty} -\ln X = -\infty$$

Proposition : *(Croissance comparée)*

On a les deux limites : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} x\cdot\ln x = 0$

Preuve :

- Posons $X = \ln x$. On a : $x \mapsto +\infty \iff X \mapsto +\infty$.
$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{e^{\ln x}} = \lim_{X\mapsto+\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X\mapsto+\infty} \frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$$
- Posons $X = \dfrac{1}{x}$. On a : $x \mapsto 0^+ \iff x \mapsto +\infty$
$$\lim_{x\mapsto 0^+} x\cdot\ln x = \lim_{x\mapsto 0^+} -\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\mapsto+\infty} -\frac{\ln X}{X} = -\infty$$

Corollaire :

Pour tout entier naturel n non-nul :

- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+0} x^n\cdot\ln x = 0$

Proposition : *(admise)*

Si u est une fonction dérivable et $u > 0$ sur un intervalle I alors :

- La fonction $x \longmapsto \ln\left[u(x)\right]$ est définie et dérivable ;
- $\left(\ln\circ u\right)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Propriété :

La fonction logarithme népérien sur $\left]0\,;+\infty\right[$:

$\left(\ln\right)'(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

Preuve :

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = e^{\ln x}$.
Or, $f(x) = x$. La formule de dérivation d'une composée donne :

$$\begin{array}{r|l} f(x) = x & \left(\ln\right)'(x) \times x = 1 \\ f'(x) = 1 & \left(\ln\right)'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \left(\ln\right)'(x) \times e^{\ln x} = 1 & \end{array}$$

Corollaire :

On a la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{\ln\left(1+x\right)}{x} = \ln'(1) = 1$

Proposition :

- La fonction logarithme népérien est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \ln x = +\infty$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \ln x = -\infty$

Preuve :

- On a $\left(\ln\right)'(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est positif sur $\mathbb{R}_+^*$: la fonction logarithme népérien est croissante.
- Soit M un réel positif. Puisque $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > a$:
$$x > e^M \implies \ln x > \ln e^M \implies \ln x > M.$$
Pour tout réel M, il existe un intervalle $\left[a\,;+\infty\right[$ tel que la fonction logarithme soit supérieur à M :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} \ln x = +\infty$$
- Posons $x = \dfrac{1}{X}$. On a : $x \mapsto 0^+ \iff X \longmapsto +\infty$.
$$\lim_{x\mapsto 0^+} \ln x = \lim_{x\mapsto+\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\mapsto+\infty} -\ln X = -\infty$$

Proposition : *(Croissance comparée)*

On a les deux limites : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} x\cdot\ln x = 0$

Preuve :

- Posons $X = \ln x$. On a : $x \mapsto +\infty \iff X \mapsto +\infty$.
$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{e^{\ln x}} = \lim_{X\mapsto+\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X\mapsto+\infty} \frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$$
- Posons $X = \dfrac{1}{x}$. On a : $x \mapsto 0^+ \iff x \mapsto +\infty$
$$\lim_{x\mapsto 0^+} x\cdot\ln x = \lim_{x\mapsto 0^+} -\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\mapsto+\infty} -\frac{\ln X}{X} = -\infty$$

Corollaire :

Pour tout entier naturel n non-nul :

- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+0} x^n\cdot\ln x = 0$

Proposition : *(admise)*

Si u est une fonction dérivable et $u > 0$ sur un intervalle I alors :

- La fonction $x \longmapsto \ln\left[u(x)\right]$ est définie et dérivable ;
- $\left(\ln\circ u\right)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

