Proposition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. La somme S des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) a pour valeur :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Preuve :

On remarque que pour tout entier k compris entre 0 et n, on a la relation :

$$\begin{aligned} u_k + u_{n-k} &= (u_0 + k\cdot r) + \big[u_0 + (n-k)\cdot r\big] \\ &= u_0 + k\cdot r + u_0 + n\cdot r - k\cdot r \\ &= u_0 + u_0 + n\cdot r = u_0 + (u_0 + n\cdot r) = u_0 + u_n \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u_1 + u_{n-1} = u_0 + u_n \quad ; \quad u_2 + u_{n-2} = u_0 + u_n \quad ; \quad \ldots$$

Le double de la somme S peut s'exprimer par :

$$2\cdot S = (u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n) + (u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n)$$

$$2\cdot S = \begin{array}{c} u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ + u_n + u_{n-1} + \cdots + u_1 + u_0 \end{array}$$

En additionnant colonne par colonne :

$$\begin{aligned} &= (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \cdots + (u_n + u_0) \\ &= (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n) \\ &= (n+1)\cdot(u_0 + u_n) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$S = \frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Proposition :

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q. La somme S des $(n+1)$ premiers termes de la suite (v_n) a pour valeur :

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve :

La suite (v_n) étant une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, le terme de rang n admet l'expression :

$$v_n = v_0\cdot q^n$$

Etudions le produit $(1-q)\cdot S$. On a les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} (1-q)\cdot S &= (1-q)\cdot(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) \\ &= v_0 - q\cdot v_0 + v_1 - q\cdot v_1 + \cdots + v_n - q\cdot v_n \end{aligned}$$

En utilisant la définition d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} &= v_0 - v_1 + v_1 - v_2 + \cdots + v_n - v_{n+1} \\ &= v_0 - v_{n+1} = v_0 - v_0\cdot q^{n+1} = v_0\cdot\big(1 - q^{n+1}\big) \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit l'égalité :

$$(1-q)\cdot S_n = v_0\cdot\big(1-q^{n+1}\big)$$

$$S_n = \frac{v_0\cdot\big(1-q^{n+1}\big)}{1-q}$$

$$S_n = v_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Proposition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. La somme S des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) a pour valeur :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Preuve :

On remarque que pour tout entier k compris entre 0 et n, on a la relation :

$$\begin{aligned} u_k + u_{n-k} &= (u_0 + k\cdot r) + \big[u_0 + (n-k)\cdot r\big] \\ &= u_0 + k\cdot r + u_0 + n\cdot r - k\cdot r \\ &= u_0 + u_0 + n\cdot r = u_0 + (u_0 + n\cdot r) = u_0 + u_n \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u_1 + u_{n-1} = u_0 + u_n \quad ; \quad u_2 + u_{n-2} = u_0 + u_n \quad ; \quad \ldots$$

Le double de la somme S peut s'exprimer par :

$$2\cdot S = (u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n) + (u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n)$$

$$2\cdot S = \begin{array}{c} u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ + u_n + u_{n-1} + \cdots + u_1 + u_0 \end{array}$$

En additionnant colonne par colonne :

$$\begin{aligned} &= (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \cdots + (u_n + u_0) \\ &= (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n) \\ &= (n+1)\cdot(u_0 + u_n) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$S = \frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Proposition :

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q. La somme S des $(n+1)$ premiers termes de la suite (v_n) a pour valeur :

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve :

La suite (v_n) étant une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, le terme de rang n admet l'expression :

$$v_n = v_0\cdot q^n$$

Etudions le produit $(1-q)\cdot S$. On a les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} (1-q)\cdot S &= (1-q)\cdot(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) \\ &= v_0 - q\cdot v_0 + v_1 - q\cdot v_1 + \cdots + v_n - q\cdot v_n \end{aligned}$$

En utilisant la définition d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} &= v_0 - v_1 + v_1 - v_2 + \cdots + v_n - v_{n+1} \\ &= v_0 - v_{n+1} = v_0 - v_0\cdot q^{n+1} = v_0\cdot\big(1 - q^{n+1}\big) \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit l'égalité :

$$(1-q)\cdot S_n = v_0\cdot\big(1-q^{n+1}\big)$$

$$S_n = \frac{v_0\cdot\big(1-q^{n+1}\big)}{1-q}$$

$$S_n = v_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$