Probabilité conditionnelle

A. Espace probabilisé:

Définition :
- On peut dire qu'une expérience est aléatoire lorsqu'on ne peut prédire la valeur de sortie.
- Chaque possibilité de sortie de l'expérience s'appelle un **événement élémentaire**.
- L'ensemble des évènements de l'expérience aléatoire s'appelle l'univers des issues ; on le note $\mathbf{\Omega}$.
- Toute partie de l'univers Ω s'appelle un **événement**.

Définition : soit Ω un univers possédant un nombre fini d'issues.
On appelle **loi de probabilité** sur Ω toute fonction $\mathcal{P}$ telle que : $\mathcal{P}$: parties de $\Omega \longmapsto [0\,;1]$

vérifiant les propriétés suivantes :
- $\mathcal{P}(\varnothing)=0$
- $\mathcal{P}(\Omega)=1$
- $\displaystyle\sum_{w\in\Omega}\mathcal{P}(\{\omega\}) = 1$
- Soit A un événement : $\displaystyle\mathcal{P}(A)=\sum_{w\in A}\mathcal{P}(\{\omega\})=1$

Définition : on dit qu'un espace probabilisé $(\Omega\,;\mathcal{P})$ représente une situation d'**équiprobabilité** si tous les événements élémentaires ont les mêmes probabilités.

Proposition : soit $(\Omega\,;\mathcal{P})$ un espace probabilisé où Ω est un ensemble fini, on peut noter :
$\Omega = \{w_1\,;\,w_2\,;\,w_3\,;\,\dots\,;\,w_n\}$
- $\mathcal{P}(w_1) = \mathcal{P}(w_2) = \cdots = \mathcal{P}(w_n) = \dfrac{1}{n}$
- A un événement de k évènements élémentaires :
  $\mathcal{P}(A) = \dfrac{k}{n}$

Remarque : soit A un évènement d'un univers Ω comprenant n évènements élémentaires suivant une loi équiprobable. La probabilité de l'évènement A est définie par :

$$\mathcal{P}(A) = \frac{\text{Nombre d'èlèments de } A}{\text{Nombre d'èlèments de } \Omega}$$

Exemple : le fait de choisir au hasard un objet dans un ensemble reflète la situation d'équiprobabilité :
- La probabilité de choisir une figure dans un jeu de 32 cartes a pour valeur : $p=\dfrac{12}{32}=\dfrac{3}{8}=0{,}375$
- Si 72 élèves sont inscrits à l'atelier théatre sur 200 élèves, la probabilité de choisir au hasard un élève inscrit au théatre sur l'ensemble des élèves a pour valeur :
  $p = \dfrac{72}{200} = 0{,}36$

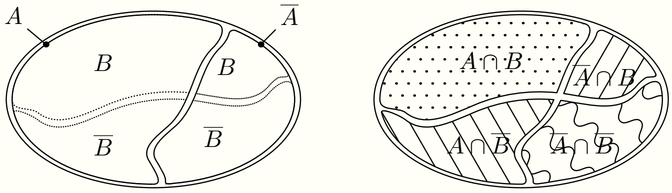
Proposition : soit $(\Omega\,;\mathcal{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements de Ω, on a :
$\mathcal{P}(A\cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A\cap B)$

Corollaire : soit $(\Omega\,;\mathcal{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements de Ω, on a :
- Si $A\cap B=\varnothing$, alors $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)$
- Pour tout événement A, on a :
  $\mathcal{P}(\overline{A}) = 1-\mathcal{P}(A)$; $\mathcal{P}(A) = 1-\mathcal{P}(\overline{A})$

Remarque : la première propriété précédente se traduit par :
Si A et B sont deux événement incompatible, la propbabilité de l'événement (A ou B) est la somme des probabilités de A et de B.

B. Probabilité conditionnelle:

Remarque :
Deux évènements A et B distincts permettent de considérer l'univers en 4 parties :



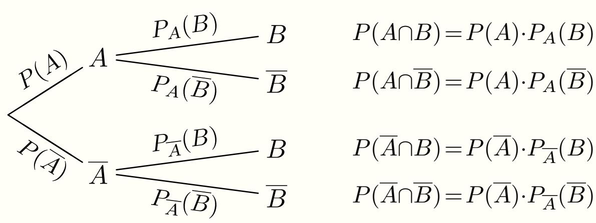
Ainsi, en choisissant un élément de A, on peut s'intéresser s'il appartient à B ou à $\overline{B}$.

Définition :
Soit A et B deux évènements tel que $\mathcal{P}(A)\neq 0$. On a appelle **probabilité de** B **sachant** A le nombre, noté $\mathcal{P}_A(B)$, définie par :

$$P_A(B) = \frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$$

Proposition :
Si A et B sont deux évènements tels que $\mathcal{P}(A)\neq 0$ et $\mathcal{P}(B)\neq 0$ alors on a :
$\mathcal{P}(A\cap B) = \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(B) = \mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}_B(A)$

Remarque :
Deux évènements distincs A et B permet de contruire l'arbre de probabilité ci-dessous de l'expérience aléatoire :



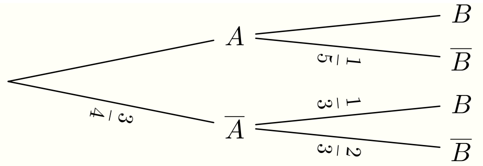
Exemple :

Exercice

Proposition : soit A un évènement et $\overline{A}$ son évènement contraire. On a : $\mathcal{P}(\overline{A})=1-\mathcal{P}(A)$

Corollaire : soit A et B deux évènements. On a :
$\mathcal{P}_A(\overline{B}) = 1-\mathcal{P}_A(B)$

On considère l'arbre de probabilité incomplet suivant :



Alors $\mathcal{P}(A\cap B)$ la probabilité de l'évènement $A\cap B$ est égale à :

a. $\dfrac{21}{20}$ b. $\dfrac{1}{5}$ c. $\dfrac{20}{21}$ d. $\dfrac{1}{12}$

correction : https://chingatome.fr/2094

Définition :

Soit A un évènement. On dit que $\{B_1\,;B_2\,;\cdots;\,B_n\}$, ensemble d'évènements, forme une **partition** de A si :

- aucune de ces évènements est vide : $\forall i\in[\![1\,;n]\!],B_i\neq\varnothing$
- ils sont disjoints deux à deux :
  $\big(\forall i\in[\![1\,;n]\!]\big)\ \big(\forall j\in[\![1\,;n]\!]\big)\ \big(i\neq j\implies B_i\cap B_j=\varnothing\big)$
- leur union est égale à A : $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}B_i$

Proposition : *(Formule des probabilités totales)*

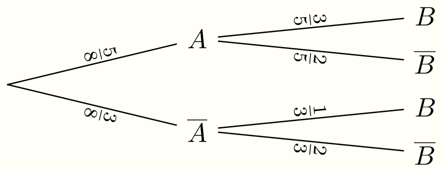
Soit A un évènement et $B_1,\ldots,B_n$ une partition de l'univers Ω.

$$\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(A\cap B_1)+\cdots+\mathcal{P}(A\cap B_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{P}(A\cap B_k)$$

Exemple :

Exercice

On considère une expérience aléatoire et deux de ses évènements A et B permettant d'obtenir l'arbre de probabilités ci-dessous :



Etablir que : $\mathcal{P}(B)=\dfrac{1}{2}$

correction : https://chingatome.fr/8558

C. Evènements indépendants :

Définition :

Soient A et B deux évènements. Les deux évenements A et B sont dits **indépendants** si :

$\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$

Proposition :

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.

A et B sont indépendants

$\iff\quad \mathcal{P}(B)=\mathcal{P}_A(B)\quad\iff\quad\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}_B(A)$

Preuve :

A est un évènement de probabilité non-nulle. Alors :

$$\mathcal{P}_A(B)=\frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$$

On a les équivalences :

$$\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}_A(B)\iff\mathcal{P}(B)=\frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$$

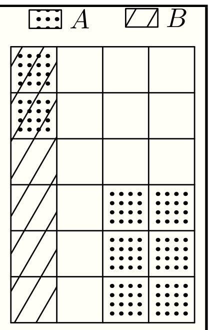
$\iff\mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(A\cap B)$

$\implies A$ et B sont indépendants

Exemple :

On a les probabilités :

$\mathcal{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{12}$; $\mathcal{P}(A)=\dfrac{1}{3}$; $\mathcal{P}(B)=\dfrac{1}{4}$



De l'égalité : $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$

On en déduit que les deux évènements A et B sont indépendants.

On vérifie que : $\mathcal{P}_B(A)=\mathcal{P}(A)$

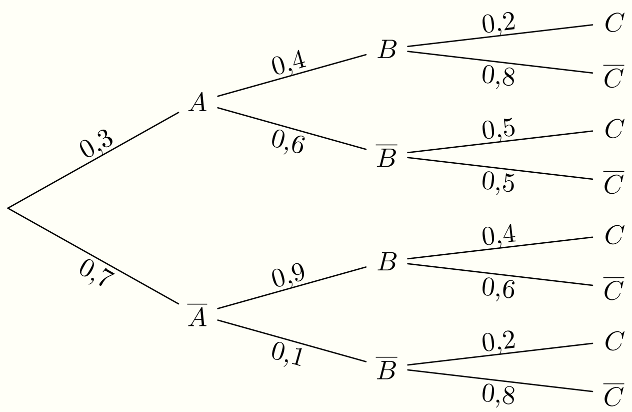
car : $\mathcal{P}_B(A)=\dfrac{2}{6}$; $\mathcal{P}(A)=\dfrac{8}{24}$

Ainsi, la probabilité de l'évènement A est égale à la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

Exemple :

Exercice

On considère une expérience aléatoire et trois de ses évènements A, B et C donnant l'arbre de probabilités ci-dessous :



1. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
2. Etablir que les évènements A et C sont indépendant?

correction : https://chingatome.fr/8325

Proposition :

Soient A et B deux évènements.

Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Preuve :

Soient A et B deux évènements indépendants.

Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(B\cap A)+\mathcal{P}(B\cap\overline{A})$$

On en déduit :

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A})=\mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(B\cap A)$$

Les évènements A et B étant indépendants :

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A})=\mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(A)$$

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A})=\mathcal{P}(B)\cdot\big[1-\mathcal{P}(A)\big]$$

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A})=\mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(\overline{A})$$

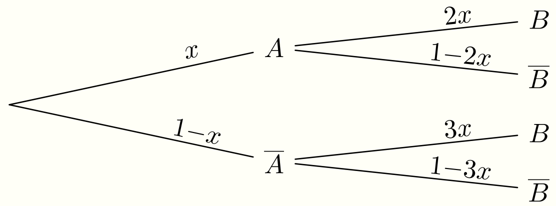
D. Quelques exemples :

1. Avec l'algèbre :

Exemple :

Exercice

Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité ci-dessous



et tels qu'il existe un nombre réel x vérifiant :

$$\mathcal{P}(A) = x \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B) = 2x \quad ; \quad \mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 3x$$

1. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}(B) = \dfrac{29}{100}$.
   Déterminer la valeur de x.

2. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_B(A) = \dfrac{1}{5}$.
   Déterminer la valeur de x.

correction : https://chingatome.fr/6741

2. Avec les suites :

Exemple :

Exercice

Dans un espace probabilisé $(\Omega\,;\mathcal{P})$. On considère une suite d'évènements (A_n) vérifiant les relations suivantes :

$$\mathcal{P}(A_0) = 0{,}4\,; \begin{cases} \mathcal{P}_{A_n}(A_{n+1}) &= 0{,}6 \\ \mathcal{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) &= 0{,}4 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

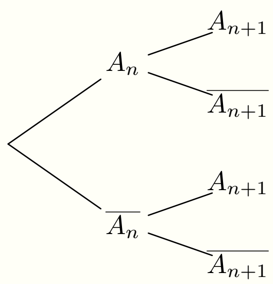
On note : $p_n = \mathcal{P}(A_n)$.

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

2. a. Etablir que :
   $p_{n+1} = 0{,}2 \cdot p_n + 0{,}4$

   b. On définit la suite q_n par :
   $q_n = p_n - 0{,}5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   Etablir que la suite (q_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

   c. En déduire l'expression de la suite (p_n) en fonction de n.



3. Déterminer la limite : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \mathcal{P}(A_n)$.

correction : https://chingatome.fr/6742