Proposition :

Soit a et b deux nombres réels, pour tout entier naturel n non-nul, on a l'égalité suivante :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Demonstration :

Pour n un entier naturel non-nul, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Etablissons que cette propriété est vraie pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

- **Initialisation :**

  Pour $n=1$, on a :

  ⇨ $(a+b)^1 = a+b$

  ⇨ $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot a^k \cdot b^{1-k} = \binom{1}{0} \cdot a^0 \cdot b^1 + \binom{1}{1} \cdot a^1 \cdot b^0 = b + a$

  On vient d'établir l'égalité : $\displaystyle (a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot a^k \cdot b^{1-k}$.

  Le propriété est vraie au rang $n=1$.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété est vraie a un rang n ; c'est à dire qu'on a l'égalité :

  $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

  Montrons alors que cette relation est vraie au rang suivant.

  On a les transformations algébriques suivantes :

  $$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n$$

  Utilisons la relation vérifiée au rang n :

  $$= (a+b) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \Big)$$

  Développons les termes du premier facteur sur le second facteur :

  $$= a \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} + b \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

  $$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{k+1} \cdot b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1}$$

  Effectuons la translation d'indice : $\ell = k+1$

  $$= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} \cdot a^{\ell} \cdot b^{n-\ell+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1}$$

  On peut réutiliser la variable k dans la première somme :

  $$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1}$$

  $$= \Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} \Big) + a^{n+1} \cdot b^0 \Big] + \Big[a^0 \cdot b^{n+1} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} \Big) \Big]$$

  $$= b^{n+1} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} \Big) + a^{n+1}$$

  Les deux sommes ayant les mêmes indices :

  $$= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \Big[\binom{n}{k-1} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} + \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} \Big] + a^{n+1}$$

  $$= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \Big[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \Big] \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} + a^{n+1}$$

  D'après la formule du triangle de Pascal :

  $$= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} + a^{n+1}$$

  $$= a^0 \cdot b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} + a^{n+1} \cdot b^0$$

  $$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^k \cdot b^{(n+1)-k}$$

  La prpriété vient d'être démontrée au rang $n+1$.

- **Conclusion :**

  La propriété s'est initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété de récurrence. A l'aide du raisonnement par récurrence, on vient de montrer que cette propriété est vraie pour tout entier naturel non-nul.