Exercice 1 Soit u et v deux fonctions dérivables et x_0 un nombre réel appartenant à l'ensemble de définition de la fonction $\frac{u}{v}$.

Déterminons le nombre dérivée de la fonction $\frac{u}{v}$ en x_0 :

$$\frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{u}{v}\right)(x_0)}{h}=\frac{\frac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h}$$

$$=\frac{\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0)}{v(x_0+h)\cdot v(x_0)}-\frac{u(x_0)\cdot v(x_0+h)}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)}}{h}$$

$$=\frac{\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0+h)}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)}}{h}$$

$$=\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0+h)}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)\cdot h}$$

$$=\frac{u(x_0+h)v(x_0)+\big[-u(x_0)v(x_0)+u(x_0)v(x_0)\big]-u(x_0)v(x_0+h)}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)\cdot h}$$

$$=\frac{\big[u(x_0+h)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)\big]-\big[u(x_0)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0)\big]}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)\cdot h}$$

$$=\frac{\big[u(x_0+h)-u(x_0)\big]\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot\big[v(x_0+h)-v(x_0)\big]}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)\cdot h}$$

$$=\frac{\frac{\big[u(x_0+h)-u(x_0)\big]\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot\big[v(x_0+h)-v(x_0)\big]}{h}}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)}$$

$$=\frac{\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)}$$

On a les limites suivantes :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}=u'(x_0)\,;\ \lim_{h\mapsto 0}\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}=v'(x_0)$$

$$\lim_{h\mapsto 0}v(x_0)\cdot v(x_0+h)=\big[v(x_0)\big]^2$$

On a la valeur du nombre dérivée de la fonction $\dfrac{u}{v}$ en x_0 :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{u}{v}\right)(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)}$$

$$=\frac{u'(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v'(x_0)}{\big[v(x_0)\big]^2}$$

Parmi toutes les transformations algébriques, lesquels *(une ou deux au choix)* a le plus d'importance pour une prise de notes de cette démonstration.

Exercice 2 Dans la démonstration donnant l'expression du nombre dérivée de la fonction $u\cdot v$ en x_0, on remarque les égalités suivantes :

$$\frac{(u\cdot v)(x_0+h)-(u\cdot v)(x_0)}{h}$$

$$=\frac{u(x_0+h)v(x_0+h)+\big[-u(x_0)v(x_0+h)+u(x_0)v(x_0+h)\big]-u(x_0)v(x_0)}{h}$$

$$=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\cdot v(x_0+h)+u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$

Ré-écrire l'intégralité de cette démonstration.