Correction 1

Voici les trois étapes clefs que je choisirais pour une prise de notes de cette démonstration :

$$\frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{u}{v}\right)(x_0)}{h}=\frac{\frac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h}$$

$$=\frac{u(x_0+h)v(x_0)+\big[-u(x_0)v(x_0)+u(x_0)v(x_0)\big]-u(x_0)v(x_0+h)}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)\cdot h}$$

$$=\frac{\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}{v(x_0)\cdot v(x_0+h)}$$

Correction 2

Voici la démonstration compléte de la formule de dérivation d'un produit :

$$\big(u\cdot v\big)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

On a les transformations suivantes :

$$\frac{\big(u\cdot v\big)(x_0+h)-\big(u\cdot v\big)(x_0)}{h}$$

$$\frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0+h)-u(x_0)\cdot v(x_0)}{h}$$

$$=\frac{u(x_0+h)v(x_0+h)+\big[-u(x_0)v(x_0+h)+u(x_0)v(x_0+h)\big]-u(x_0)v(x_0)}{h}$$

$$=\frac{\big[u(x_0+h)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0+h)\big]+\big[u(x_0)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0)\big]}{h}$$

$$=\frac{\big[u(x_0+h)-u(x_0)\big]v(x_0+h)}{h}-\frac{u(x_0)\cdot\big[v(x_0+h)-v(x_0)\big]}{h}$$

$$=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\cdot v(x_0+h)+u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$

On a les deux limigtes suivantes :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}=u'(x_0)\quad;\quad\lim_{h\mapsto 0}\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}=v'(x_0)$$

On a la limite suivante :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{\big(u\cdot v\big)(x_0+h)-\big(u\cdot v\big)(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\cdot v(x_0+h)+u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$

$$=u'(x_0)\cdot v(x_0+h)+u(x_0)\cdot v'(x_0)$$