A. Suite arithmético-géométrique :

Dqns cette partie, on considère trois nombres réels a, b et c avec $a \neq 1$. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = c \quad ; \quad u_{n+1} = a \cdot u_n + b$$

Proposition :

La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel, par :

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$$

est une suite géométrique de raison a.

Démonstration :

A faire

Corollaire :

Le terme de rang n de la suite (u_n) admet l'expression :

$$u_n = \left(c - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$$

Démonstration :

A faire

B. Suite homographique :

Dans cette partie, on considère deux nombres réels a et b. On considère la fonction f définit par :

$$f(x) = \frac{1}{a \cdot x + b}$$

Lemme :

L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution si, et seulement si $b^2 + 4 \cdot a = 0$

Preuve :

A faire

On suppose désormais que la relation $b^2 + 4 \cdot a = 0$ est vérifiée. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) :

$$u_0 = \alpha \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{a \cdot x + b} \\ v_n = \dfrac{1}{u_n + \dfrac{b}{2 \cdot a}} \end{cases} \text{ pout tout } n \in \mathbb{N}$$

Lemme :

Etablir les égalités suivantes :

- $v_n = \dfrac{b}{b \cdot u_n - 2}$
- $v_{n+1} = \dfrac{4b - b^2 \cdot u_n}{2b \cdot u_n - 4}$

Preuve :

A faire

Proposition :

La suite (v_n) est une suite arithémtique de raison $-\dfrac{b}{2}$

Preuve :

A faire