Théorème :

Soit z et z' deux nombres complexes non-nuls admettant les écritures trigonométriques suivantes :

$$z = r\cdot\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big) \quad ; \quad z' = r\cdot\big(\cos\theta' + i\cdot\sin\theta'\big)$$

On a les écritures trigonométriques des nombres complexes suivants :

- $\overline{z} = r\cdot\big[\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\big]$
- $z\cdot z' = r\cdot r'\cdot\big[\cos(\theta+\theta') + i\cdot\sin(\theta+\theta')\big]$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\cdot\big[\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\big]$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}\cdot\big[\cos(\theta-\theta') + i\cdot\sin(\theta-\theta')\big]$

Démonstration :

- $\overline{z} = r\cdot\big(\cos\theta - i\cdot\sin\theta\big) = r\cdot\Big[\cos(-\theta) + i\cdot\big(-\sin\theta\big)\Big]$

  $= r\cdot\big[\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\big]$
- $z\cdot z' = \big[r\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)\big]\cdot\big[r'\cdot(\cos\theta' + i\cdot\sin\theta')\big]$

  $= r\cdot r'\cdot\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big)\cdot\big(\cos\theta' + i\cdot\sin\theta'\big)$

  $= r\cdot r'\cdot\Big(\cos\theta\cdot\cos\theta' + i\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta'$

  $\qquad + i\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta' + i^2\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta'\Big)$

  $= r\cdot r'\cdot\Big[(\cos\theta\cdot\cos\theta' - \sin\theta\cdot\sin\theta')$

  $\qquad + i\cdot(\cos\theta\cdot\sin\theta' + \sin\theta\cdot\cos\theta')\Big]$

  $= r\cdot r'\cdot\big[(\cos(\theta+\theta') + i\cdot\sin(\theta+\theta')\big]$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r\cdot\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big)} = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta + i\cdot\sin\theta}$

  $= \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\cos\theta - i\cdot\sin\theta}{(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)(\cos\theta - i\cdot\sin\theta)}$

  $= \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\cos\theta - i\cdot\sin\theta}{(\cos\theta)^2 - i^2\cdot\sin^2\theta} = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\cos(-\theta) + i\cdot\big(-\sin\theta\big)}{(\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$

  $= \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)}{1} = \dfrac{1}{r}\cdot\big[\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\big]$
- On a : $\dfrac{z}{z'} = z\cdot\dfrac{1}{z'}$

  où les nombres complexes z et $\dfrac{1}{z'}$ sont définis par :

  $\big|z\big| = r$; $\big|z'\big| = \dfrac{1}{r'}$; $\arg(z) = \theta$; $\arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = -\theta'$

  La formule du produit précédemment démontrée permet de donner l'écriture trigonométrique du produit :

  $z\cdot\dfrac{1}{z'} = r\cdot\dfrac{1}{r'}\cdot\Big[\cos\big[\theta+(-\theta')\big] + i\cdot\sin\big[\theta+(-\theta')\big]\Big]$

  $= \dfrac{r}{r'}\cdot\big[\cos\big(\theta-\theta'\big) + i\cdot\sin\big(\theta-\theta'\big)\big]$

Corollaire :

Soit z et z' deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

- sur les modules :
  - $\big|z\cdot z'\big| = \big|z\big|\cdot\big|z'\big|$
  - $\big|z^n\big| = \big|z\big|^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
  - $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{\big|z\big|}$
  - $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{\big|z\big|}{\big|z'\big|}$
- sur les arguments si z et z' sont non-nuls :
  - $\arg(z\cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$
  - $\arg(z^n) = n\cdot\arg(z)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
  - $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
  - $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Corollaire :

Soit A, B, C trois points du plan muni du repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ distincts deux à deux. On note z_A, z_B, z_C leurs affixes respectives. On a :

- $AB = \big|z_B - z_A\big|$; $\big(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AB}\big) = \arg(z_B - z_A)$
- $\dfrac{CB}{CA} = \left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right|$; $\big(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\big) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$

Exemple :

On considère les quatre points A, B, C, D d'affixes respectives :

$z_A = 1 + i$; $z_B = -1 - i$

$z_C = -3 - 3\cdot i$; $z_D = \sqrt{3} - \sqrt{3}\cdot i$

On effectue les calculs pour obtenir l'écriture algébrique des quotients : $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$; $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$

- On a $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = 2$ et ces trois points sont distincts deux à deux :

  $\arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \arg(2) \implies \arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = 0$

  $\implies \big(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\big) = 0$

  $\implies$ Les points A, B, C sont alignés.
- On a : $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i = 1\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$

  De plus, les points A, B et D sont distincts deux à deux :

$\left\lvert\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right\rvert = 1$	$\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
$\dfrac{\lvert z_D - z_A\rvert}{\lvert z_B - z_A\rvert} = 1$	$\widehat{DAB} = \dfrac{\pi}{3}$
$\dfrac{AD}{AB} = 1$	
$AD = AB$	

  On en déduit que DAB est un triangle équilatéral

Théorème :

Soit z et z' deux nombres complexes non-nuls admettant les écritures trigonométriques suivantes :

$$z = r\cdot\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big) \quad ; \quad z' = r\cdot\big(\cos\theta' + i\cdot\sin\theta'\big)$$

On a les écritures trigonométriques des nombres complexes suivants :

- $\overline{z} = r\cdot\big[\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\big]$
- $z\cdot z' = r\cdot r'\cdot\big[\cos(\theta+\theta') + i\cdot\sin(\theta+\theta')\big]$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\cdot\big[\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\big]$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}\cdot\big[\cos(\theta-\theta') + i\cdot\sin(\theta-\theta')\big]$

Démonstration :

- $\overline{z} = r\cdot\big(\cos\theta - i\cdot\sin\theta\big) = r\cdot\Big[\cos(-\theta) + i\cdot\big(-\sin\theta\big)\Big]$

  $= r\cdot\big[\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\big]$
- $z\cdot z' = \big[r\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)\big]\cdot\big[r'\cdot(\cos\theta' + i\cdot\sin\theta')\big]$

  $$\begin{aligned} &= r\cdot r'\cdot\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big)\cdot\big(\cos\theta' + i\cdot\sin\theta'\big) \\ &= r\cdot r'\cdot\Big(\cos\theta\cdot\cos\theta' + i\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta' \\ &\qquad +i\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta' + i^2\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta'\Big) \\ &= r\cdot r'\cdot\Big[(\cos\theta\cdot\cos\theta' - \sin\theta\cdot\sin\theta') \\ &\qquad +i\cdot(\cos\theta\cdot\sin\theta' + \sin\theta\cdot\cos\theta')\Big] \\ &= r\cdot r'\cdot\big[(\cos(\theta+\theta') + i\cdot\sin(\theta+\theta')\big] \end{aligned}$$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r\cdot\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big)} = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta + i\cdot\sin\theta}$

  $$\begin{aligned} &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\theta - i\cdot\sin\theta}{(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)(\cos\theta - i\cdot\sin\theta)} \\ &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\theta - i\cdot\sin\theta}{(\cos\theta)^2 - i^2\cdot\sin^2\theta} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos(-\theta) + i\cdot\big(-\sin\theta\big)}{(\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\ &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)}{1} = \frac{1}{r}\cdot\big[\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\big] \end{aligned}$$
- On a : $\dfrac{z}{z'} = z\cdot\dfrac{1}{z'}$

  où les nombres complexes z et $\dfrac{1}{z'}$ sont définis par :

  $$\big|z\big| = r \ ; \ \big|z'\big| = \frac{1}{r'} \ ; \ \arg(z) = \theta \ ; \ \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\theta'$$

  La formule du produit précédemment démontrée permet de donner l'écriture trigonométrique du produit :

  $$\begin{aligned} z\cdot\frac{1}{z'} &= r\cdot\frac{1}{r'}\cdot\Big[\cos\big[\theta+(-\theta')\big] + i\cdot\sin\big[\theta+(-\theta')\big]\Big] \\ &= \frac{r}{r'}\cdot\Big[\cos\big(\theta-\theta'\big) + i\cdot\sin\big(\theta-\theta'\big)\Big] \end{aligned}$$

Théorème :

Soit z et z' deux nombres complexes non-nuls admettant les écritures trigonométriques suivantes :

$$z = r\cdot\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big) \quad ; \quad z' = r\cdot\big(\cos\theta' + i\cdot\sin\theta'\big)$$

On a les écritures trigonométriques des nombres complexes suivants :

- $\overline{z} = r\cdot\big[\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\big]$
- $z\cdot z' = r\cdot r'\cdot\big[\cos(\theta+\theta') + i\cdot\sin(\theta+\theta')\big]$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\cdot\big[\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\big]$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}\cdot\big[\cos(\theta-\theta') + i\cdot\sin(\theta-\theta')\big]$

Démonstration :

- $\overline{z} = r\cdot\big(\cos\theta - i\cdot\sin\theta\big) = r\cdot\Big[\cos(-\theta) + i\cdot\big(-\sin\theta\big)\Big]$

  $= r\cdot\big[\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\big]$
- $z\cdot z' = \big[r\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)\big]\cdot\big[r'\cdot(\cos\theta' + i\cdot\sin\theta')\big]$

  $$\begin{aligned} &= r\cdot r'\cdot\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big)\cdot\big(\cos\theta' + i\cdot\sin\theta'\big) \\ &= r\cdot r'\cdot\Big(\cos\theta\cdot\cos\theta' + i\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta' \\ &\qquad +i\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta' + i^2\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta'\Big) \\ &= r\cdot r'\cdot\Big[(\cos\theta\cdot\cos\theta' - \sin\theta\cdot\sin\theta') \\ &\qquad +i\cdot(\cos\theta\cdot\sin\theta' + \sin\theta\cdot\cos\theta')\Big] \\ &= r\cdot r'\cdot\big[(\cos(\theta+\theta') + i\cdot\sin(\theta+\theta')\big] \end{aligned}$$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r\cdot\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big)} = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta + i\cdot\sin\theta}$

  $$\begin{aligned} &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\theta - i\cdot\sin\theta}{(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)(\cos\theta - i\cdot\sin\theta)} \\ &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\theta - i\cdot\sin\theta}{(\cos\theta)^2 - i^2\cdot\sin^2\theta} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos(-\theta) + i\cdot\big(-\sin\theta\big)}{(\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\ &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)}{1} = \frac{1}{r}\cdot\big[\cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta)\big] \end{aligned}$$
- On a : $\dfrac{z}{z'} = z\cdot\dfrac{1}{z'}$

  où les nombres complexes z et $\dfrac{1}{z'}$ sont définis par :

  $$\big|z\big| = r \ ; \ \big|z'\big| = \frac{1}{r'} \ ; \ \arg(z) = \theta \ ; \ \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\theta'$$

  La formule du produit précédemment démontrée permet de donner l'écriture trigonométrique du produit :

  $$\begin{aligned} z\cdot\frac{1}{z'} &= r\cdot\frac{1}{r'}\cdot\Big[\cos\big[\theta+(-\theta')\big] + i\cdot\sin\big[\theta+(-\theta')\big]\Big] \\ &= \frac{r}{r'}\cdot\Big[\cos\big(\theta-\theta'\big) + i\cdot\sin\big(\theta-\theta'\big)\Big] \end{aligned}$$

Corollaire :

Soit z et z' deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

- sur les modules :
  - $|z\cdot z'| = |z|\cdot|z'|$; $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
  - $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$; $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- sur les arguments si z et z' sont non-nuls :
  - $\arg(z\cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$
  - $\arg(z^n) = n\cdot\arg(z)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
  - $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
  - $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Corollaire :

Soit A, B, C trois points du plan muni du repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ distincts deux à deux. On note z_A, z_B, z_C leurs affixes respectives. On a :

- $AB = |z_B - z_A|$; $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)$
- $\dfrac{CB}{CA} = \left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right|$; $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$

Exemple :

On considère les quatre points A, B, C, D d'affixes respectives :

$z_A = 1 + i$; $z_B = -1 - i$

$z_C = -3 - 3\cdot i$; $z_D = \sqrt{3} - \sqrt{3}\cdot i$

On effectue les calculs pour obtenir l'écriture algébrique des quotients : $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$; $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$

- On a $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C} = 2$ et ces trois points sont distincts deux à deux :

  $\arg\left(\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right) = \arg(2) \implies \arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = 0$

  $\implies \left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right) = 0$

  $\implies$ Les points A, B, C sont alignés.

- On a : $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i = 1\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$

  De plus, les points A, B et D sont distincts deux à deux :

$\left\lvert\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right\rvert = 1$	$\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
$\dfrac{\lvert z_D - z_A\rvert}{\lvert z_B - z_A\rvert} = 1$	$\widehat{DAB} = \dfrac{\pi}{3}$
$\dfrac{AD}{AB} = 1$	
$AD = AB$	

  On en déduit que DAB est un triangle équilatéral

Corollaire :

Soit z et z' deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

- sur les modules :
  - $|z\cdot z'| = |z|\cdot|z'|$; $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
  - $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$; $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- sur les arguments si z et z' sont non-nuls :
  - $\arg(z\cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$
  - $\arg(z^n) = n\cdot\arg(z)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
  - $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
  - $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Corollaire :

Soit A, B, C trois points du plan muni du repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ distincts deux à deux. On note z_A, z_B, z_C leurs affixes respectives. On a :

- $AB = |z_B - z_A|$; $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)$
- $\dfrac{CB}{CA} = \left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right|$; $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$

Exemple :

On considère les quatre points A, B, C, D d'affixes respectives :

$z_A = 1 + i$; $z_B = -1 - i$

$z_C = -3 - 3\cdot i$; $z_D = \sqrt{3} - \sqrt{3}\cdot i$

On effectue les calculs pour obtenir l'écriture algébrique des quotients : $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$; $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$

- On a $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C} = 2$ et ces trois points sont distincts deux à deux :

  $\arg\left(\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right) = \arg(2) \implies \arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = 0$

  $\implies \left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right) = 0$

  $\implies$ Les points A, B, C sont alignés.

- On a : $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i = 1\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$

  De plus, les points A, B et D sont distincts deux à deux :

$\left\lvert\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right\rvert = 1$	$\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
$\dfrac{\lvert z_D - z_A\rvert}{\lvert z_B - z_A\rvert} = 1$	$\widehat{DAB} = \dfrac{\pi}{3}$
$\dfrac{AD}{AB} = 1$	
$AD = AB$	

  On en déduit que DAB est un triangle équilatéral