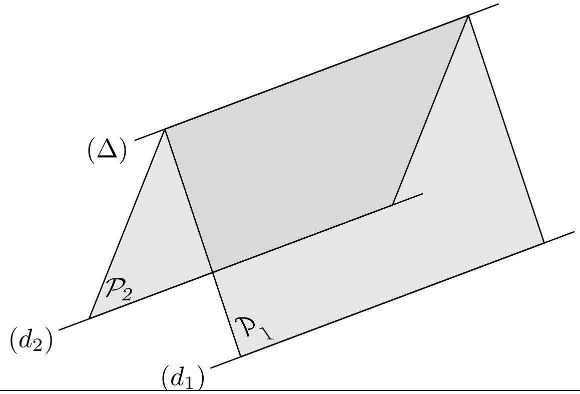
Théorème :

Dans l'espace, on considère deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ contenant respectivement les droites (d_1) et (d_2) parallèles entre elles.

Si les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants entre eux alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans.



Preuve :

Les droites (d_1) et (d_2) étant parallèles, deux positions relatives sont possibles :

- **(d_1) et (d_2) sont parallèles et confondues :**
  Les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ étant sécants, leur intersection est une droite.
  Les droites (d_1) et (d_2) étant confondues, elles forment l'intersection de ces deux plans : les droites (d_1), (d_2) et (Δ) sont toutes confondues.
  Ainsi, on a : $(\Delta)/\!\!/(d_1)$ et $(\Delta)/\!\!/(d_2)$

- **(d_1) et (d_2) sont strictement parallèles :**
  En raisonnant par l'absurde, supposons que (Δ) n'est pas parallèle à au moins une des deux droites (d_1) et (d_2). Choisissons (d_1) par exemple.

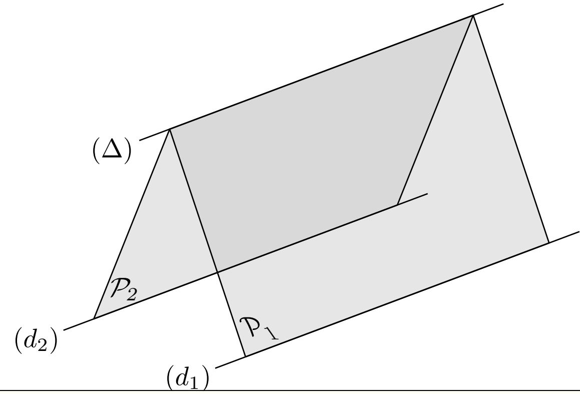
  > **Supposons que (Δ) et (d_1) ne sont pas parallèles.**
  > (Δ) étant la droite d'intersection des plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$, on en déduit que les droites (Δ) et (d_1) sont coplanaires. Etant non-parallèles, on en déduit qu'elles sont sécantes : notons M le point d'intersection des droites (Δ) et (d_1).
  >
  > La droite (d_2) est incluse dans le plan $(\mathcal{P}_2)$.
  > La droite (d_1) passe par le point M, appartenant également à $(\mathcal{P}_2)$, et est parallèle à (d_2) : la droite (d_1) est incluse dans le plan $(\mathcal{P}_2)$.
  >
  > La droite (d_1) est incluse dans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$: elle appartient à l'intersection de ces deux plans. Or, l'intersection de deux plans étant une droite, on en déduit que (d_1) et (Δ) sont confondues.
  >
  > On arrive à l'absurdité : (d_1) **et** (Δ) **sont parallèles confondues.**

  La droite (Δ) ne pouvant être non-parallèle à au moins une des deux droites (d_1) et (d_2), on en déduit que (Δ) est parallèle à ces deux droites.

Théorème :

Dans l'espace, on considère deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ contenant respectivement les droites (d_1) et (d_2) parallèles entre elles.

Si les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants entre eux alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans.



Preuve :

Les droites (d_1) et (d_2) étant parallèles, deux positions relatives sont possibles :

- **(d_1) et (d_2) sont parallèles et confondues :**
  Les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ étant sécants, leur intersection est une droite.
  Les droites (d_1) et (d_2) étant confondues, elles forment l'intersection de ces deux plans : les droites (d_1), (d_2) et (Δ) sont toutes confondues.
  Ainsi, on a : $(\Delta)/\!\!/(d_1)$ et $(\Delta)/\!\!/(d_2)$

- **(d_1) et (d_2) sont strictement parallèles :**
  En raisonnant par l'absurde, supposons que (Δ) n'est pas parallèle à au moins une des deux droites (d_1) et (d_2). Choisissons (d_1) par exemple.

  > **Supposons que (Δ) et (d_1) ne sont pas parallèles.**
  > (Δ) étant la droite d'intersection des plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$, on en déduit que les droites (Δ) et (d_1) sont coplanaires. Etant non-parallèles, on en déduit qu'elles sont sécantes : notons M le point d'intersection des droites (Δ) et (d_1).
  >
  > La droite (d_2) est incluse dans le plan $(\mathcal{P}_2)$.
  > La droite (d_1) passe par le point M, appartenant également à $(\mathcal{P}_2)$, et est parallèle à (d_2) : la droite (d_1) est incluse dans le plan $(\mathcal{P}_2)$.
  >
  > La droite (d_1) est incluse dans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$: elle appartient à l'intersection de ces deux plans. Or, l'intersection de deux plans étant une droite, on en déduit que (d_1) et (Δ) sont confondues.
  >
  > On arrive à l'absurdité : (d_1) **et** (Δ) **sont parallèles confondues.**

  La droite (Δ) ne pouvant être non-parallèle à au moins une des deux droites (d_1) et (d_2), on en déduit que (Δ) est parallèle à ces deux droites.