**Proposition :**

On a les trois limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \ ; \ \lim_{x\mapsto-\infty} x\cdot e^x = 0 \ ; \ \lim_{x\mapsto 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

**Preuve :**

- On remarque l'égalité suivante :
  $$\Big(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\Big)^2 = \frac{\big(e^{\frac{x}{2}}\big)^2}{\big(\sqrt{x}\big)^2} = \frac{e^{\frac{x}{2}\times 2}}{x} = \frac{e^x}{x}$$
  Nous avons établi, dans un lemme précédent, l'inégalité ci-dessous pour tout $u\in\mathbb{R}$ :
  $$e^u > u$$
  En particulier pour $u=\frac{x}{2}$, on a :
  $$e^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{2}$$
  $\sqrt{x}$ est un nombre positif :
  $$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} > \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{x}}$$
  $$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} > \frac{x}{2\cdot\sqrt{x}}$$
  $$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} > \frac{\sqrt{x}}{2}$$
  $$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} > \frac{\sqrt{x}}{2} > 0$$
  La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$ :
  $$\Big(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\Big)^2 > \Big(\frac{\sqrt{x}}{2}\Big)^2$$
  $$\Big(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\Big)^2 > \frac{x}{4}$$
  En utilisant l'égalité de début de démonstration :
  $$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{4}$$
  On a la limite $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{x}{4} = +\infty$. D'après les théorèmes de comparaisons des limites, on obtient :
  $$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
- Posons le changement de variable suivant : $x=-X$
  - $x\cdot e^x = -X\cdot e^{-X} = -X\cdot\frac{1}{e^X} = -\frac{X}{e^X} = -\frac{1}{\frac{e^X}{X}}$
  - Lorsque $x$ tend vers $-\infty$, on a $X$ tend vers $+\infty$.

  Des deux remarques précédentes, on en déduit l'égalité des deux limites suivantes :
  $$\lim_{x\mapsto-\infty} x\cdot e^x = \lim_{X\mapsto+\infty} -\frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$$
  car $\lim\limits_{X\mapsto+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$
- La définition du nombre dérivée en 0 donne :
  $$\exp'(0) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{\exp(0+h)-\exp(0)}{h}$$
  $$\exp(0) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{\exp(h)-1}{h}$$
  $$1 = \lim_{h\mapsto 0} \frac{e^h-1}{h}$$

**Corollaire :** *(admis)*

Pour tout entier naturel $n$ non-nul :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} x^n\cdot e^x = 0$$