

Proposition :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.

- Si f est positive sur I , alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- Si f est négative sur I , alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$

Démonstration :

La fonction f étant continue, elle admet une primitive qu'on notera F . La démonstration de cette propriété se base sur le sens de variation de la fonction F puisqu'on connaît le signe de f qui est sa dérivée :

- Supposons que f est positive, alors la fonction F est croissante. On a la comparaison suivante :

$$b \geq a$$

Puisque la fonction F est croissante :

$$F(b) \geq F(a)$$

$$F(b) - F(a) \geq 0$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

- Supposons que f est négative, alors la fonction F est décroissante. On a la comparaison suivante :

$$b \geq a$$

Puisque la fonction F est décroissante :

$$F(b) \leq F(a)$$

$$F(b) - F(a) \leq 0$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0$$

Corollaire :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ tels que :

$$f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in [a; b]$$

Alors, on a la comparaison :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Preuve :

Puisque que pour tout $x \in [a; b]$, on a la comparaison :

$$f(x) \leq g(x)$$

On en déduit les inégalités suivantes :

$$f(x) - g(x) \leq 0$$

La fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ est négative,

d'après la proposition précédente, on a :

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx \leq 0$$

Par utilisation de la linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \leq 0$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Proposition :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.

- Si f est positive sur I , alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- Si f est négative sur I , alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$

Démonstration :

La fonction f étant continue, elle admet une primitive qu'on notera F . La démonstration de cette propriété se base sur le sens de variation de la fonction F puisqu'on connaît le signe de f qui est sa dérivée :

- Supposons que f est positive, alors la fonction F est croissante. On a la comparaison suivante :

$$b \geq a$$

Puisque la fonction F est croissante :

$$F(b) \geq F(a)$$

$$F(b) - F(a) \geq 0$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

- Supposons que f est négative, alors la fonction F est décroissante. On a la comparaison suivante :

$$b \geq a$$

Puisque la fonction F est décroissante :

$$F(b) \leq F(a)$$

$$F(b) - F(a) \leq 0$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0$$

Corollaire :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ tels que :

$$f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in [a; b]$$

Alors, on a la comparaison :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Preuve :

Puisque que pour tout $x \in [a; b]$, on a la comparaison :

$$f(x) \leq g(x)$$

On en déduit les inégalités suivantes :

$$f(x) - g(x) \leq 0$$

La fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ est négative,

d'après la proposition précédente, on a :

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx \leq 0$$

Par utilisation de la linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \leq 0$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Proposition : (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois nombres réels appartenant à I . On a l'égalité :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Démonstration :

La fonction f est une fonction continue, elle admet donc une primitive qu'on notera F . Par définition de l'intégrale, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \\ &= [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] \\ &= F(c) + [F(b) - F(b)] - F(a) = F(c) - F(a) \\ &= \int_a^c f(x) dx \end{aligned}$$

Corollaire :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Preuve :

D'après la relation de Chasles, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) = \int_a^a f(x) dx \\ & \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) = F(a) - F(a) \\ & \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Proposition : (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois nombres réels appartenant à I . On a l'égalité :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Démonstration :

La fonction f est une fonction continue, elle admet donc une primitive qu'on notera F . Par définition de l'intégrale, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \\ &= [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] \\ &= F(c) + [F(b) - F(b)] - F(a) = F(c) - F(a) \\ &= \int_a^c f(x) dx \end{aligned}$$

Corollaire :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Preuve :

D'après la relation de Chasles, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) = \int_a^a f(x) dx \\ & \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) = F(a) - F(a) \\ & \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et λ un nombre réel quelconque. On a les deux identités suivantes :

- $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) + g(x) dx$
- $\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \left(\int_a^b f(x) dx \right)$

Ces deux propriétés s'appellent "propriétés de linéarité de l'intégrale".

Démonstration :

Les fonctions f et g étant continues, elles admettent deux primitives notées respectivement F et G .

- Etablissons l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx &= \int_a^b f(x) + g(x) dx \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx &= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) \\ &= (F+G)(b) - (F+G)(a) \\ &= [F+G]_a^b \end{aligned}$$

- La formule de dérivation de l'addition permet d'écrire :

$$(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x)$$

Par définition des primitives F et G :

$$= f(x) + g(x)$$

On en déduit :

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = [F(x) + G(x)]_a^b$$

- Etablissons l'égalité : $\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx &= \lambda \cdot [f(x)]_a^b = \lambda \cdot [f(b) - f(a)] \\ &= \lambda \cdot f(b) - \lambda \cdot f(a) \end{aligned}$$

- λ étant un coefficient constant, on en déduit la dérivation suivante :

$$(\lambda \cdot F)' = \lambda \cdot F' = \lambda \cdot f$$

On en déduit que la fonction $(\lambda \cdot F)$ est la primitive de la fonction $(\lambda \cdot f)$.

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = [\lambda \cdot F(x)]_a^b = \lambda \cdot f(b) - \lambda \cdot f(a)$$

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et λ un nombre réel quelconque. On a les deux identités suivantes :

- $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) + g(x) dx$
- $\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \left(\int_a^b f(x) dx \right)$

Ces deux propriétés s'appellent "propriétés de linéarité de l'intégrale".

Démonstration :

Les fonctions f et g étant continues, elles admettent deux primitives notées respectivement F et G .

- Etablissons l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx &= \int_a^b f(x) + g(x) dx \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx &= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) \\ &= (F+G)(b) - (F+G)(a) \\ &= [F+G]_a^b \end{aligned}$$

- La formule de dérivation de l'addition permet d'écrire :

$$(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x)$$

Par définition des primitives F et G :

$$= f(x) + g(x)$$

On en déduit :

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = [F(x) + G(x)]_a^b$$

- Etablissons l'égalité : $\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx &= \lambda \cdot [f(x)]_a^b = \lambda \cdot [f(b) - f(a)] \\ &= \lambda \cdot f(b) - \lambda \cdot f(a) \end{aligned}$$

- λ étant un coefficient constant, on en déduit la dérivation suivante :

$$(\lambda \cdot F)' = \lambda \cdot F' = \lambda \cdot f$$

On en déduit que la fonction $(\lambda \cdot F)$ est la primitive de la fonction $(\lambda \cdot f)$.

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = [\lambda \cdot F(x)]_a^b = \lambda \cdot f(b) - \lambda \cdot f(a)$$