Théorème : *(fondamental)*

Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$, la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par :

$$F\colon x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $[a\,;b]$ et admet pour dérivée la fonction f.

Démonstration :

Dire que la fonction F est dérivable et admet pour dérivée la fonction f signifie que le nombre dérivée de la fonction F en x_0 vaut $f(x_0)$. Nous devons donc établir, pour tout $x_0 \in [a\,;b]$, l'égalité :

$$F'(x_0) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{F(x_0{+}h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

On ne montrera pas le théorème dans sa généralité *(qui sera admis)* mais seulemnet dans le cas particulier où la fonction est également **croissante**.

Pour établir la valeur de la limite recherchée, nous allons étudier séparemment la limite à droite et à gauche.

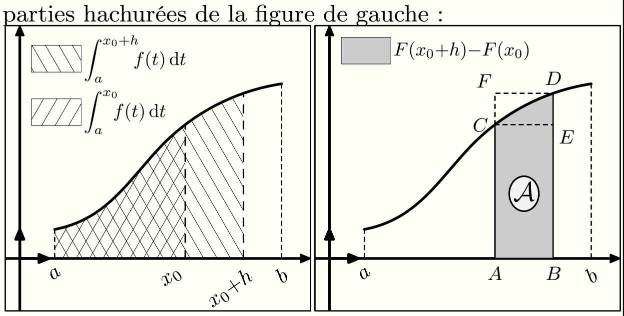
- **Etude du nombre dérivée à droite :**

Montrons que : $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0^+} \frac{F(x_0{+}h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

Pour étudier ce cas, on suppose que $h>0$. Par définition de la fonction F, on a :

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad F(x_0{+}h) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par définition de l'intégrale d'une fonction positive, les deux images, $F(x_0)$ et $F(x_0{+}h)$, sont représentées par les parties hachurées de la figure de gauche :



Ainsi, l'aire grisée de la figure de droite, notée $\mathcal{A}$, est obtenue par décomposition des surfaces :

$$F(x_0) + \mathcal{A} = F(x_0{+}h)$$
$$\mathcal{A} = F(x_0{+}h) - F(x_0)$$

Parmi les points de la figure de droite, on a les coordonnées suivantes :

$C(x_0\,;f(x_0)) \quad ; \quad D(x_0{+}h\,;f(x_0{+}h))$

On a les aires suivantes des rectangles $ABEC$ et $ABDF$:

$\mathcal{A}_{ABEC} = h{\times}f(x_0) \quad ; \quad \mathcal{A}_{ABDF} = h{\times}f(x_0{+}h)$

La comparaison des aires permet d'obtenir l'encadrement :

$$h{\times}f(x_0) \leqslant \qquad \mathcal{A} \qquad \leqslant h{\times}f(x_0{+}h)$$
$$h{\times}f(x_0) \leqslant F(x_0{+}h) - F(x_0) \leqslant h{\times}f(x_0{+}h)$$

h est un nombre réel positif :

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0{+}h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0{+}h)$$

La continuité de la fonction f sur $[a\,;b]$ et en particulier en x_0 permet d'obtenir la limite suivante :

$$\lim_{h\mapsto 0^+} f(x_0{+}h) = f(x_0)$$

D'après l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes, on obtient la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{h\mapsto 0^+} \frac{F(x_0{+}h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

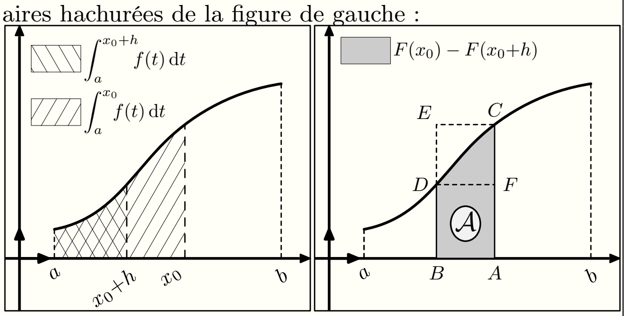
- **Etude du nombre dérivée à gauche :**

Montrons que $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0^-} \frac{F(x_0{+}h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

Pour étudier ce cas, on suppose que $h<0$. Par définition de la fonction F, on a :

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad F(x_0{+}h) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par définition de l'intégrale d'une fonction positive, les deux images, $F(x_0)$ et $F(x_0{+}h)$, sont représentées par les aires hachurées de la figure de gauche :



Ainsi, l'aire grisée de la figure de droite étant notée $\mathcal{A}$, on obtient par décomposition des surfaces, l'égalité suivante :

$$F(x_0{+}h) + \mathcal{A} = F(x_0)$$
$$\mathcal{A} = F(x_0) - F(x_0{+}h)$$

Parmi les points de la figure de droite, on a les coordonnées suivantes :

$C(x_0\,;f(x_0)) \quad ; \quad D(x_0{+}h\,;f(x_0{+}h))$

On a les aires suivantes des rectangles $ABEC$ et $ABDF$:

$\mathcal{A}_{ABEC} = (-h){\times}f(x_0) \quad ; \quad \mathcal{A}_{ABDF} = (-h){\times}f(x_0{+}h)$

(Ne pas oublier qu'une aire est positive et que le nombre réel h est négatif).

La comparaison des aires permet d'obtenir l'encadrement :

$$(-h){\times}f(x_0{+}h) \leqslant \qquad \mathcal{A} \qquad \leqslant (-h){\times}f(x_0)$$
$$(-h){\times}f(x_0{+}h) \leqslant F(x_0) - F(x_0{+}h) \leqslant h{\times}f(x_0)$$

$-h$ est un nombre réel positif :

$$f(x_0{+}h) \leqslant \frac{F(x_0) - F(x_0{+}h)}{-h} \leqslant f(x_0)$$
$$f(x_0{+}h) \leqslant \frac{F(x_0{+}h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$$

La continuité de la fonction f sur $[a\,;b]$ et en particulier en x_0 permet d'obtenir la limite suivante :

$$\lim_{h\mapsto 0^-} f(x_0{+}h) = f(x_0)$$

D'après l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes, on obtient la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{h\mapsto 0^-} \frac{F(x_0{+}h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

- **Conclusion :**

On vient de montrer l'égalité des deux limites à gauche et à droite :

$$\lim_{h\mapsto 0^-} \frac{F(x_0{+}h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\mapsto 0^+} \frac{F(x_0{+}h) - F(x_0)}{h}$$

Ce qui montre l'existence de la limite $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0} \frac{F(x_0{+}h) - F(x_0)}{h}$

et cette limite a pour valeur :

$$\lim_{h\mapsto 0} \frac{F(x_0{+}h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Par définition du nombre dérivée d'une fonction, on a :

$$F'(x) = f(x_0)$$