**Proposition :** *(Inégalité de Bernoulli)*

Pour tout entier naturel $n$, la propriété $\mathcal{P}_n$ définie ci-dessous est vraie :

$\mathcal{P}_n$ : "$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (1+x)^n \geqslant 1+n \cdot x$"

**Démonstration :**

Démontrons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$ :

- **Initialisation :**

  Pour $n=0$, on a : $(1+x)^0=1$ ; $1+0\times x=1+0=0$

  On a : $(1+x)^0 \geqslant 1+0 \cdot x$. $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel $n$ quelconque. C'est à dire qu'on a :

  $$(1+x)^n \geqslant 1+n \cdot x$$
  $$(1+x)^n \cdot (1+x) \geqslant \big(1+n \cdot x\big) \cdot (1+x)$$
  $$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+x+n \cdot x+n \cdot x^2$$
  $$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1) \cdot x+n \cdot x^2$$

  Or, $n \cdot x^2$ est un nombre strictement positif :

  $$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1) \cdot x$$

  On vient de monterr que $P_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier naturel $n$.

**Proposition :**

Soit $q$ un nombre réel tel que $q>1$. On a la limite :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} q^n = +\infty$$

**Démonstration :**

Remarquons l'égalité : $q = 1+(q-1)$

Puisque $q>1$, on en déduit que le nombre $q-1$ est un nombre strictement positif.

On a l'églaité :

$$q^n = \big[1+(q-1)\big]^n$$

D'après l'inégalité de Bernoulli, on en déduit que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$q^n \geqslant 1+n \cdot (1-q)$$

Soit $A$ un nombre positif, considérons l'inéquation :

$$1+(q-1) \cdot n \geqslant A$$
$$(q-1) \cdot n \geqslant A-1$$

On divise par $q-1$ qui est positif :

$$n \geqslant \frac{A-1}{q-1}$$

Ainsi, pour tout $n$ supérieur à $\dfrac{A-1}{q-1}$, on a :

$$q^n \geqslant 1+(q-1) \cdot n \quad ; \quad 1+(q-1) \cdot n \geqslant A$$

On en déduit : $q^n \geqslant A$

On vient de montrer que pour tout nombre $A$ positif, il existe un rang $N$ vérifiant l'implication :

$$n \geqslant N \implies q^n \geqslant A$$

Ainsi, la suite $\big(q^n\big)$ vérifie la définition d'une suite divergent vers $+\infty$ :

$$\lim_{n \mapsto} q^n = +\infty$$


**Proposition :** *(Inégalité de Bernoulli)*

Pour tout entier naturel $n$, la propriété $\mathcal{P}_n$ définie ci-dessous est vraie :

$\mathcal{P}_n$ : "$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (1+x)^n \geqslant 1+n \cdot x$"

**Démonstration :**

Démontrons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$ :

- **Initialisation :**

  Pour $n=0$, on a : $(1+x)^0=1$ ; $1+0\times x=1+0=0$

  On a : $(1+x)^0 \geqslant 1+0 \cdot x$. $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel $n$ quelconque. C'est à dire qu'on a :

  $$(1+x)^n \geqslant 1+n \cdot x$$
  $$(1+x)^n \cdot (1+x) \geqslant \big(1+n \cdot x\big) \cdot (1+x)$$
  $$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+x+n \cdot x+n \cdot x^2$$
  $$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1) \cdot x+n \cdot x^2$$

  Or, $n \cdot x^2$ est un nombre strictement positif :

  $$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1) \cdot x$$

  On vient de monterr que $P_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier naturel $n$.

**Proposition :**

Soit $q$ un nombre réel tel que $q>1$. On a la limite :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} q^n = +\infty$$

**Démonstration :**

Remarquons l'égalité : $q = 1+(q-1)$

Puisque $q>1$, on en déduit que le nombre $q-1$ est un nombre strictement positif.

On a l'églaité :

$$q^n = \big[1+(q-1)\big]^n$$

D'après l'inégalité de Bernoulli, on en déduit que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$q^n \geqslant 1+n \cdot (1-q)$$

Soit $A$ un nombre positif, considérons l'inéquation :

$$1+(q-1) \cdot n \geqslant A$$
$$(q-1) \cdot n \geqslant A-1$$

On divise par $q-1$ qui est positif :

$$n \geqslant \frac{A-1}{q-1}$$

Ainsi, pour tout $n$ supérieur à $\dfrac{A-1}{q-1}$, on a :

$$q^n \geqslant 1+(q-1) \cdot n \quad ; \quad 1+(q-1) \cdot n \geqslant A$$

On en déduit : $q^n \geqslant A$

On vient de montrer que pour tout nombre $A$ positif, il existe un rang $N$ vérifiant l'implication :

$$n \geqslant N \implies q^n \geqslant A$$

Ainsi, la suite $\big(q^n\big)$ vérifie la définition d'une suite divergent vers $+\infty$ :

$$\lim_{n \mapsto} q^n = +\infty$$


 