Exercice

1. **Quelques propriétés d'arithmétique :**
   a. Quelle propriété représente le fait que le nombre a est un multiple de 7 ?
   $a=k\times7$; $a=k\div7$; $a=7\div k$
   b. Soient a et b deux entiers multiples de 7. Montrer que leur somme et leur différence sont également un multiple de 7.

Dans la suite de l'exercice, on notera a et b deux entiers non-nuls. On notera :

- r le reste de la division euclidienne de a par b ;
- d le PGCD des entiers a et b.

2. On note d' le PGCD de b et de r.
   a. Justifier que d divise r. En déduire que $d\leqslant d'$.
   b. Justifier que d' divise a. En déduire que $d'\leqslant d$.
   c. Conclure.

On vient de montrer :
Proposition :

Si r est non-nul alors le PGCD des nombres a et b est égal au PGCD de b et de r.

3. Dans cette question, on suppose que le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0.
   a. Quel est le plus grand diviseur du nombre b ?
   b. Déterminer la valeur du PGCD de a et de b.

On vient de montrer :
Proposition :

Si r est nul alors le PGCD des nombres a et b vaut b.

Exercice

1. **Quelques propriétés d'arithmétique :**
   a. Quelle propriété représente le fait que le nombre a est un multiple de 7 ?
   $a=k\times7$; $a=k\div7$; $a=7\div k$
   b. Soient a et b deux entiers multiples de 7. Montrer que leur somme et leur différence sont également un multiple de 7.

Dans la suite de l'exercice, on notera a et b deux entiers non-nuls. On notera :

- r le reste de la division euclidienne de a par b ;
- d le PGCD des entiers a et b.

2. On note d' le PGCD de b et de r.
   a. Justifier que d divise r. En déduire que $d\leqslant d'$.
   b. Justifier que d' divise a. En déduire que $d'\leqslant d$.
   c. Conclure.

On vient de montrer :
Proposition :

Si r est non-nul alors le PGCD des nombres a et b est égal au PGCD de b et de r.

3. Dans cette question, on suppose que le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0.
   a. Quel est le plus grand diviseur du nombre b ?
   b. Déterminer la valeur du PGCD de a et de b.

On vient de montrer :
Proposition :

Si r est nul alors le PGCD des nombres a et b vaut b.

Exercice

1. **Quelques propriétés d'arithmétique :**
   a. Quelle propriété représente le fait que le nombre a est un multiple de 7 ?
   $a=k\times7$; $a=k\div7$; $a=7\div k$
   b. Soient a et b deux entiers multiples de 7. Montrer que leur somme et leur différence sont également un multiple de 7.

Dans la suite de l'exercice, on notera a et b deux entiers non-nuls. On notera :

- r le reste de la division euclidienne de a par b ;
- d le PGCD des entiers a et b.

2. On note d' le PGCD de b et de r.
   a. Justifier que d divise r. En déduire que $d\leqslant d'$.
   b. Justifier que d' divise a. En déduire que $d'\leqslant d$.
   c. Conclure.

On vient de montrer :
Proposition :

Si r est non-nul alors le PGCD des nombres a et b est égal au PGCD de b et de r.

3. Dans cette question, on suppose que le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0.
   a. Quel est le plus grand diviseur du nombre b ?
   b. Déterminer la valeur du PGCD de a et de b.

On vient de montrer :
Proposition :

Si r est nul alors le PGCD des nombres a et b vaut b.

Correction

1. a. Si a est un multiple de 7 alors il existe un entier k réalisant l'égalité :
$a = 7\times k$

b. Puisque les nombres a et b sont des multiples de 7, il existe deux entiers k et k' réalisant les égalités :
$a = 7\times k \quad ; \quad b = 7\times k'$
Ainsi, on a :
- $a+b = 7\times k + 7\times k' = 7\times\big(k+k'\big)$
Ainsi, la somme de a et b est un multiple de 7.
- $a-b = 7\times k - 7\times k' = 7\times\big(k-k'\big)$
Ainsi, la différence de a et b est un multiple de 7.

2. a. Par la définition de l'entier d, a et b sont divisible par d. La division euclidienne de a par b donne l'existence d'un entier q tel que :
$a = q\times b + r$
$r = a - q\times b$
Or, les deux nombres a et $q\times b$ étant divisible par d, à l'aide de la question 1. b., on en déduit que r est également divisible par d.
Ainsi, d divise à la fois b et r. Or, d' étant le plus grand diviseur de b et r, on en déduit que d est plus petit :
$d \leqslant d'$.

b. Par définition, d' divise b et r.
De l'égalité $a = q\times b + r$ et de la question 1. b., on en déduit que d' divise a.
Ainsi, d' est un diviseur commun à a et b. Or, d'après la définition de d, on en déduit :
$d' \leqslant d$

c. On vient d'établir les deux comparaisons :
$d \leqslant d' \quad ; \quad d' \leqslant d$
On en déduit $d = d'$.

3. a. Le plus grand diviseur de b est b lui-même.

b. Du fait que le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0, on en déduit l'égalité :
$a = q\times b$
Ainsi, a est un multiple de b. On en déduit que b est un diviseur de a et de b. Le PGCD de a et de b est l'entier b.

Correction

1. a. Si a est un multiple de 7 alors il existe un entier k réalisant l'égalité :
$a = 7\times k$

b. Puisque les nombres a et b sont des multiples de 7, il existe deux entiers k et k' réalisant les égalités :
$a = 7\times k \quad ; \quad b = 7\times k'$
Ainsi, on a :
- $a+b = 7\times k + 7\times k' = 7\times\big(k+k'\big)$
Ainsi, la somme de a et b est un multiple de 7.
- $a-b = 7\times k - 7\times k' = 7\times\big(k-k'\big)$
Ainsi, la différence de a et b est un multiple de 7.

2. a. Par la définition de l'entier d, a et b sont divisible par d. La division euclidienne de a par b donne l'existence d'un entier q tel que :
$a = q\times b + r$
$r = a - q\times b$
Or, les deux nombres a et $q\times b$ étant divisible par d, à l'aide de la question 1. b., on en déduit que r est également divisible par d.
Ainsi, d divise à la fois b et r. Or, d' étant le plus grand diviseur de b et r, on en déduit que d est plus petit :
$d \leqslant d'$.

b. Par définition, d' divise b et r.
De l'égalité $a = q\times b + r$ et de la question 1. b., on en déduit que d' divise a.
Ainsi, d' est un diviseur commun à a et b. Or, d'après la définition de d, on en déduit :
$d' \leqslant d$

c. On vient d'établir les deux comparaisons :
$d \leqslant d' \quad ; \quad d' \leqslant d$
On en déduit $d = d'$.

3. a. Le plus grand diviseur de b est b lui-même.

b. Du fait que le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0, on en déduit l'égalité :
$a = q\times b$
Ainsi, a est un multiple de b. On en déduit que b est un diviseur de a et de b. Le PGCD de a et de b est l'entier b.

Correction

1. a. Si a est un multiple de 7 alors il existe un entier k réalisant l'égalité :
$a = 7\times k$

b. Puisque les nombres a et b sont des multiples de 7, il existe deux entiers k et k' réalisant les égalités :
$a = 7\times k \quad ; \quad b = 7\times k'$
Ainsi, on a :
- $a+b = 7\times k + 7\times k' = 7\times\big(k+k'\big)$
Ainsi, la somme de a et b est un multiple de 7.
- $a-b = 7\times k - 7\times k' = 7\times\big(k-k'\big)$
Ainsi, la différence de a et b est un multiple de 7.

2. a. Par la définition de l'entier d, a et b sont divisible par d. La division euclidienne de a par b donne l'existence d'un entier q tel que :
$a = q\times b + r$
$r = a - q\times b$
Or, les deux nombres a et $q\times b$ étant divisible par d, à l'aide de la question 1. b., on en déduit que r est également divisible par d.
Ainsi, d divise à la fois b et r. Or, d' étant le plus grand diviseur de b et r, on en déduit que d est plus petit :
$d \leqslant d'$.

b. Par définition, d' divise b et r.
De l'égalité $a = q\times b + r$ et de la question 1. b., on en déduit que d' divise a.
Ainsi, d' est un diviseur commun à a et b. Or, d'après la définition de d, on en déduit :
$d' \leqslant d$

c. On vient d'établir les deux comparaisons :
$d \leqslant d' \quad ; \quad d' \leqslant d$
On en déduit $d = d'$.

3. a. Le plus grand diviseur de b est b lui-même.

b. Du fait que le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0, on en déduit l'égalité :
$a = q\times b$
Ainsi, a est un multiple de b. On en déduit que b est un diviseur de a et de b. Le PGCD de a et de b est l'entier b.