Proposition :

Soit f une fonction du second degré :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
Variations de f **Pour $a<0$**	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a^2}$	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
Variations de f **Pour $a>0$**	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Preuve :

Soit f une fonction du second degré définie par :

$$f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \quad a \neq 0$$

La forme canonique de la fonction f admet pour expression :

$$f(x) = a\cdot\Big(x + \frac{b}{2\cdot a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}$$

- **Pour $a<0$:** et sur l'intervalle $\Big]-\infty\,;-\dfrac{b}{2\cdot a}\Big]$, démontrons le sens de variation :

  Pour tout nombre x_1 et x_2 appartenant à l'intervalle $\Big]-\infty\,;-\dfrac{b}{2\cdot a}\Big]$ tels que $x_1 < x_2$, on a :

  $$x_1 < x_2 < -\frac{b}{2\cdot a}$$

  $$x_1 + \frac{b}{2\cdot a} < x_2 + \frac{b}{2\cdot a} < 0$$

  La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$:

  $$\Big(x_1 + \frac{b}{2\cdot a}\Big)^2 > \Big(x_2 + \frac{b}{2\cdot a}\Big)^2$$

  Le nombre a est strictement négatif :

  $$a\cdot\Big(x_1 + \frac{b}{2\cdot a}\Big)^2 > a\cdot\Big(x_2 + \frac{b}{2\cdot a}\Big)^2$$

  $$a\cdot\Big(x_1 + \frac{b}{2\cdot a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4\cdot a\cdot c}{4\cdot a} > a\cdot\Big(x_2 + \frac{b}{2\cdot a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}$$

  $$f(x_1) < f(x_2)$$

  Deux nombres de l'intervalle $\Big]-\infty\,;-\dfrac{b}{2\cdot a}\Big]$ et leurs images par la fonction f sont comparés dans le même sens : la fonction f est croissante sur cet intervalle.

- Les autres cas se démontrent de la même façon.