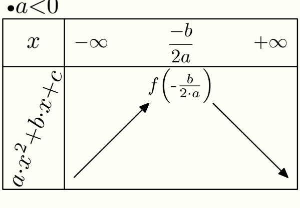
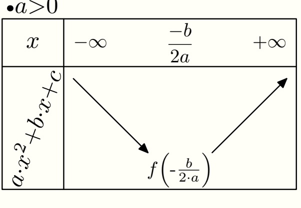
Proposition :

Une fonction du second degré $f:x\mapsto a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ $(a\neq 0)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et son tableau de variations dépend du signe du coefficient du terme du second degré :

•$a<0$



•$a>0$



où : $f\Big(-\dfrac{b}{2a}\Big)=\dfrac{\Delta}{4{\cdot}a}$

Preuve :

Preuve partielle du sens de variation d'une fonction du second degré :

Considérons la fonction polynômomiale du second degré f : $x\mapsto a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ avec $a<0$. Montrons que f est décroissante sur $\Big[-\dfrac{b}{2{\cdot}a}\,;+\infty\Big[$:

Pour x et x' deux nombres réels de $\Big[-\dfrac{b}{2{\cdot}a}\,;+\infty\Big[$ tels que $x<x'$, on a :

$$-\frac{b}{2{\cdot}a}<x<x'$$

$$-\frac{b}{2{\cdot}a}+\frac{b}{2{\cdot}a}<x+\frac{b}{2{\cdot}a}<x'+\frac{b}{2{\cdot}a}$$

$$0<x+\frac{b}{2{\cdot}a}<x'+\frac{b}{2{\cdot}a}$$

Deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le même ordre :

$$\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2<\Big(x'+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2$$

Le coefficient a est négatif :

$$a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2>a{\cdot}\Big(x'+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2$$

$$a{\cdot}\Big(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}>a{\cdot}\Big(x'+\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}$$

$$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c>a{\cdot}x'^2+b{\cdot}x'+c$$

$$f(x)>f'(x)$$

Ainsi, deux nombres appartenant à $\Big[-\dfrac{b}{2{\cdot}a}\,;+\infty\Big[$ et leur image par la fonction f sont comparés dans l'ordre contraire : on en déduit que la fonction f est décroissante sur $\Big[-\dfrac{b}{2{\cdot}a}\,;+\infty\Big[$