Somme des termes d'une suite

A. Somme :

1. Nombre de termes d'une somme :

Proposition :

Soit (u_n) une suite. Considérons la somme S définit par :
$$S = u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n$$
La somme S comprend $n-k+1$ termes.

2. des termes d'une suite arithmétique :

Proposition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour tout entier naturel n, on a :
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Preuve :

Pour tout entier naturel ℓ, le terme de rang k admet pour expression :
$$u_\ell = u_0 + \ell\cdot r$$
Ainsi, pour tout entier naturel k, on a :
$$u_k + u_{n-k} = (u_0 + k\cdot r) + [u_0 + (n-k)\cdot r]$$
$$= u_0 + k\cdot r + u_0 + (n-k)\cdot r = u_0 + u_0 + n\cdot r$$
$$= u_0 + u_n$$
Notons, S la somme des premiers termes de la suite (u_n) :
$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$
Cette somme peut aussi s'écrire :
$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_2 + u_1 + u_0$$
L'addition, termes à termes, des deux expressions de S permet d'obtenir l'égalité :
$$2\cdot S = (u_0+u_n) + (u_1+u_{n-1}) + (u_2+u_{n-2}) + \cdots + (u_{n-2}+u_2) + (u_{n-1}+u_1) + (u_n+u_0)$$
D'après la remarque précédente :
$$2\cdot S = (u_0+u_n) + (u_0+u_n) + (u_0+u_n) + \cdots + (u_n+u_0) + (u_n+u_0) + (u_n+u_0)$$
Cette somme comprend $n+1$ termes :
$$2\cdot S = (n+1)\cdot(u_0+u_n)$$
$$S = \frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Exemple :

Déterminons la valeur de la somme des 40 premiers impairs :
$$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 79$$
On reconnait les termes de la suite (u_n) arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. La somme S s'exprime par :
$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{39}$$
$$= \frac{(39+1)(2\times1+39\times2)}{2} = \frac{40\cdot(1+79)}{2} = 20\times80 = 160$$

Corollaire :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour tout entier naturel n, on a :
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(2\cdot u_0 + n\cdot r)}{2}$$

Remarque :

- En utilisant la formule explicite des termes d'une suite arithmétique, on a également l'expression de cette somme :
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(2\cdot u_0 + n\cdot r)}{2}$$
- On généralise cette formule par :
$$u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n = \frac{\overbrace{(n-k+1)}^{\text{Nombres de termes}}\cdot(\overset{\text{Premier terme}}{u_k} + \overset{\text{Dernier terme}}{u_n})}{2}$$

Remarque :

Cette propriété sera démontrée en terminale par un raisonnement par récurrence :

r394-0

3. des termes d'une suite géométrique :

Proposition :

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q tel que $q\neq1$. Pour tout entier naturel n, on a :
$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve :

Notons S la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (v_n). On a :
$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n$$
$$(1-q)\cdot S = (1-q)\cdot(v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-2}+v_{n-1}+v_n)$$
$$(1-q)\cdot S = [v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n] - q\cdot[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n]$$
$$(1-q)\cdot S = [v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n] - [q\cdot v_0 + q\cdot v_1 + q\cdot v_2 + \cdots + q\cdot v_{n-2} + q\cdot v_{n-1} + q\cdot v_n]$$
$$(1-q)\cdot S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n - v_1 - v_2 - v_3 - \cdots - v_{n-1} - v_n - v_{n+1}$$
$$(1-q)\cdot S = v_0 - v_{n+1}$$
$$(1-q)\cdot S = v_0 - v_0\cdot q^{n+1}$$
$$(1-q)\cdot S = v_0\cdot(1-q^{n+1})$$
$$S = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque :

On généralise cette formule par :
$$u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n = \overset{\text{Premier terme}}{u_k}\cdot\frac{1-q^{\overset{\text{Nombre de termes}}{n-k+1}}}{1-q}$$

Exemple :

Déterminons la valeur de la somme :

$S = 1+3+9+27+\cdots+6561$
La suite logique de ces termes représentent les premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3. Notons (u_n) cette suite.

Notons n le rang du terme de valeur 6561 de la suite (u_n). On doit avoir :
$$u_n = u_0 \times q^n \Longrightarrow 6561 = 1\times 3^n \Longrightarrow 6561 = 3^n$$
Des essais à la calculatrice permettent d'obtenir : $n=8$

Ainsi, la somme S s'exprime par :
$$\begin{aligned} S &= 1+3+9+27+\cdots+6561 \\ &= u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_8 \\ &= u_0\cdot\frac{1-q^{8+1}}{1-q} = 1\times\frac{1-3^9}{1-3} = \frac{1-3^9}{-2} = \frac{1}{2}\cdot\left(3^9-1\right) \end{aligned}$$

Remarque :
Cette propriété sera démontrée en terminale par un raisonnement par récurrence :
r654-1

B. Exemples :

1. L'échiquier de Sissa :

Le problème de l'**échiquier de Sissa** *[...]* est un problème de mathématique datant du 6^e siècle :

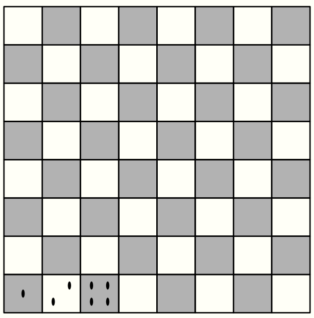
> *"On place un grain de blé sur la première case d'un échiquier. Si on fait en sorte de doubler à chaque case le nombre de grains de la case précédente (un grain sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, etc...), combien de grains de riz obtient-on au total"*

Source : Wikipédia

Pour rappel, un échiquier est composé de 64 cases blanches ou noires.

Ainsi, ayant complété les trois premières cases, il y a 7 grains de blé sur l'échiquier.

Combien de grains de blé faut-il pour compléter l'échiquier?



2. Coureur :

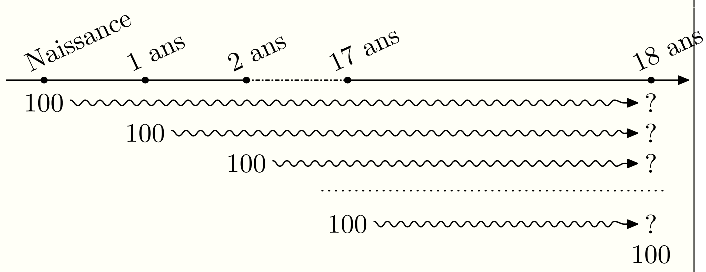
Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.

Le globe-trotter peut-il gagner?

Source : Extrait du Baccalauréat
Terminale L spécialité
Polynésie 2006

3. Annuité :

Depuis le jour de la naissance de leur fille Aline, les parents déposent la somme de 100 € sur le livret A de leur enfant chaque année.
On suppose que sur l'ensemble de la période d'étude, le taux de rémunération du livret est resté constant à 1 %.



Quelle sera la somme dont disposera Aline sur son livret A le jour de ses 18 ans?

4. Le tapis de :

Intéressons nous à la fractale du tapis de Sierpinski *(1916)* du nom de son créateur polonais, est construit par une succession d'étapes définies par :

A chaque carré blanc, on le subdivise en 9 carrés identiques en partageant ses côtés en trois segments de même longueur et on colorie en noir le carré central

Voici les six premières étapes de cette construction :

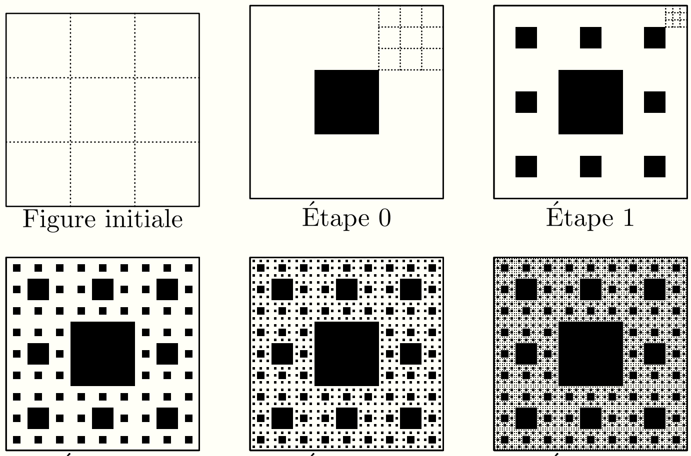


Figure initiale — Étape 0 — Étape 1
Étape 2 — Étape 3 — Étape 4

Combien de carrés noirs contient l'étape 5?

