Correction 1

1. c. On a les longueurs suivantes de suites de Syracuse :
$\mathscr{L}(26) = 10 \quad ; \quad \mathscr{L}(27) = 112$

2. a. La longueur de la suite de Syracuse associée à un nombre de la forme 2^p vaut p.

b. On remarque que pour, $k \in \mathbb{N}^*$, les deux nombres $8{\cdot}k{+}4$ et $8{\cdot}k{+}5$ ont des suites de Syracuse de même longueur.

c. En fait, on remarque que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, les listes des nombres $8{\cdot}k{+}4$ et $8{\cdot}k{+}5$ coincident à partir du $4^{\text{ième}}$ termes :

- Pour le nombre $8{\cdot}k{+}4$, voici les quatre premiers nombres de la liste :
  - $8{\cdot}k{+}4$
  - $\big[8{\cdot}k+4\big]\div 2 = 4{\cdot}k+2$
  - $\big[4{\cdot}k+2\big]\div 2 = 2{\cdot}k+1$
  - $3{\cdot}\big[2{\cdot}k+1\big]+1 = 6{\cdot}k+4$
- Pour le nombre $8{\cdot}k{+}5$, voici les trois premiers nombres de la liste :
  - $8{\cdot}k+5$
  - $3{\cdot}\big[8{\cdot}k+5\big]+1 = 24{\cdot}k+16$
  - $\big[24{\cdot}k+16\big]\div 2 = 12{\cdot}k+8$
  - $\big[12{\cdot}k+8\big]\div 2 = 6{\cdot}k+4$

3. Etudions séparemment les trois cas :

- Supposons que $n \equiv 0 \pmod{4}$:
Ainsi, le nombre n est pair et à la seconde étape, la liste de Syracuse associée contient le nombre $\dfrac{n}{2}$ qui est strictement inférieur à n.
- Supposons que $n \equiv 2 \pmod{4}$:
Ainsi, le nombre n est pair et à la seconde étape, la liste de Syracuse associée contient le nombre $\dfrac{n}{2}$ qui est strictement inférieur à n.
- Supposons que $n \equiv 3 \pmod{4}$:
Il existe un entier k tel que $n = 4{\cdot}k+1$. Etudions les premiers éléments de la liste de Syracuse associée à n :
  - n est un nombre impair. Le second terme de la liste est :
$3{\cdot}\big[4{\cdot}k+1\big]+1 = 12{\cdot}k+4$
  - Le nombre $12{\cdot}k+4$ est pair. Le troisième terme de la liste est :
$\big[12{\cdot}k+4\big]\div 2 = 6{\cdot}k+2$
  - Le nombre $6{\cdot}k+2$ est pair. Le troisième terme de la liste est :
$\big[6{\cdot}k+2\big]\div 2 = 3{\cdot}k+1$

On a les comparaisons suivantes :
$$3{\cdot}k < 4{\cdot}k$$
$$3{\cdot}k+1 < 4{\cdot}k+1$$
$$3{\cdot}k+1 < n$$
L'assertion est donc prouvée : on obtient dans la liste un nombre strictement inférieur à n.

Correction 1

1. c. On a les longueurs suivantes de suites de Syracuse :
$\mathscr{L}(26) = 10 \quad ; \quad \mathscr{L}(27) = 112$

2. a. La longueur de la suite de Syracuse associée à un nombre de la forme 2^p vaut p.

b. On remarque que pour, $k \in \mathbb{N}^*$, les deux nombres $8{\cdot}k{+}4$ et $8{\cdot}k{+}5$ ont des suites de Syracuse de même longueur.

c. En fait, on remarque que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, les listes des nombres $8{\cdot}k{+}4$ et $8{\cdot}k{+}5$ coincident à partir du $4^{\text{ième}}$ termes :

- Pour le nombre $8{\cdot}k{+}4$, voici les quatre premiers nombres de la liste :
  - $8{\cdot}k{+}4$
  - $\big[8{\cdot}k+4\big]\div 2 = 4{\cdot}k+2$
  - $\big[4{\cdot}k+2\big]\div 2 = 2{\cdot}k+1$
  - $3{\cdot}\big[2{\cdot}k+1\big]+1 = 6{\cdot}k+4$
- Pour le nombre $8{\cdot}k{+}5$, voici les trois premiers nombres de la liste :
  - $8{\cdot}k+5$
  - $3{\cdot}\big[8{\cdot}k+5\big]+1 = 24{\cdot}k+16$
  - $\big[24{\cdot}k+16\big]\div 2 = 12{\cdot}k+8$
  - $\big[12{\cdot}k+8\big]\div 2 = 6{\cdot}k+4$

3. Etudions séparemment les trois cas :

- Supposons que $n \equiv 0 \pmod{4}$:
Ainsi, le nombre n est pair et à la seconde étape, la liste de Syracuse associée contient le nombre $\dfrac{n}{2}$ qui est strictement inférieur à n.
- Supposons que $n \equiv 2 \pmod{4}$:
Ainsi, le nombre n est pair et à la seconde étape, la liste de Syracuse associée contient le nombre $\dfrac{n}{2}$ qui est strictement inférieur à n.
- Supposons que $n \equiv 3 \pmod{4}$:
Il existe un entier k tel que $n = 4{\cdot}k+1$. Etudions les premiers éléments de la liste de Syracuse associée à n :
  - n est un nombre impair. Le second terme de la liste est :
$3{\cdot}\big[4{\cdot}k+1\big]+1 = 12{\cdot}k+4$
  - Le nombre $12{\cdot}k+4$ est pair. Le troisième terme de la liste est :
$\big[12{\cdot}k+4\big]\div 2 = 6{\cdot}k+2$
  - Le nombre $6{\cdot}k+2$ est pair. Le troisième terme de la liste est :
$\big[6{\cdot}k+2\big]\div 2 = 3{\cdot}k+1$

On a les comparaisons suivantes :
$$3{\cdot}k < 4{\cdot}k$$
$$3{\cdot}k+1 < 4{\cdot}k+1$$
$$3{\cdot}k+1 < n$$
L'assertion est donc prouvée : on obtient dans la liste un nombre strictement inférieur à n.

