## Correction 1

### Partie A

3. a. On peut émettre les conjectures suivantes :
   - $U_n$ est divisible par 2 lorsque $n$ est pair.
   - $U_n$ n'est jamais divisible par 3.
   - $U_n$ est divisible par 7 et par 7 lorsque $n$ est un multiple de 6.

   b. Il semble que les nombres divisibles par $7\times13$ et par $2\times7\times13$ sont les mêmes nombres et semblent être les nombres admettant une écriture de la forme :
   $6{\cdot}k$ où $k\in\mathbb{N}$

### Partie B

1. On a l'identité suivante :
$$\big(3-1\big)\big(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}\big)=3^n-1$$
$$2{\cdot}U_n=3^n-1$$
   - Supposons que $U_n$ est divisible par 7.
   Il existe un entier naturel $k$ tel que :
   $$U_n=7{\cdot}k$$
   $$2{\cdot}U_n=14{\cdot}k$$
   $$3^n-1=14{\cdot}k$$
   Cette égalité montre $3^n-1$ est divisible par 7.
   - Supposons que 7 divise $3^n-1$.
   On en déduit que le nombre 7 divise le produit $2{\cdot}U_n$.
   Le nombre 7 est un nombre premier et, 2 et 7 sont deux nombres premiers entre eux.
   D'après le théorème de Gauss, on en déduit que le nombre 7 divise $U_n$.

2. On a le tableau suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $3^n-1$ | 0 | 2 | 8 | 26 | 80 | 242 |
| Reste de $3^n-1$ par 7 | 0 | 2 | 1 | 5 | 3 | 4 |

Soit $n$ un entier naturel non-nul. Le reste de la division euclidienne de $n$ par 6 donne l'existence de deux entiers naturel $k$ et $r$, où $0\leqslant r<6$, vérifiant :
$$n=6{\cdot}k+r$$

On a les égalités suivantes :
$$3^n-1=3^{6\cdot k+r}-1=3^{6\cdot k}\times3^r-1=729^k\times3^r-1$$
Or, $729=104\times7+1$. On a :
$$\equiv 1^k\times3^r-1 \pmod{7}$$
$$\equiv 3^r-1 \pmod{7}$$

Or, pour $r$ tel que $0\leqslant r<6$, à l'aide du tableau précédent, les seules valeurs de $n$ tels que $3^n-1$ soit divisibles par 7 sont celles qui ont $r=0$.
Ainsi, les entiers $n$ tels que $3^n-1$ soit divisible par 7 sont les multiples de 6.

Ce qui confirme la conjecture émise pour le diviseur 7 à la question **A**.2..

3. Si $U_n$ est divisible par 7, alors le rang $n$ est multiple de 6 : il existe un entier $k$ tel que $n=6{\cdot}k$.

On a alors :
$$2{\cdot}U_n=3^n-1=3^{6\cdot k}-1=729^k-1$$
   - Etudions la divisibilité par 13 de $U_n$ :
   De l'égalité :
   $$729=56\times13+1$$
   On en déduit la congruence :
   $$729\equiv1 \pmod{13}$$
   $$729^k\equiv1^k \pmod{13}$$
   $$729^k\equiv1 \pmod{13}$$
   $$729^k-1\equiv0 \pmod{13}$$
   $$2{\cdot}U_n\equiv0 \pmod{13}$$
   On en déduit que l'entier 13 divise le produit $2{\cdot}U_n$. Or, 2 et 13 sont premiers entre eux et 13 est un nombre premier. D'après le théorème de Gauss, on en déduit que 13 divise $U_n$.
   - Etudions la divisibilité par 2 de $U_n$ :
   De l'égalité :
   $$729=182\times4+1$$
   On en déduit la congruence :
   $$729\equiv1 \pmod{4}$$
   $$729^k\equiv1^k \pmod{4}$$
   $$729^k\equiv1 \pmod{4}$$
   $$729^k-1\equiv1-1 \pmod{4}$$
   $$729^k-1\equiv0 \pmod{4}$$
   $$2{\cdot}U_n\equiv0 \pmod{4}$$
   Il existe un entier $k$ tel que :
   $$2{\cdot}U_n\equiv4{\cdot}k$$
   $$U_n\equiv2{\cdot}k$$
   L'entier $U_n$ est un multiple de 2.

Ainsi, pour $n$ multiple de 6, l'entier $U_n$ est divisible par 2, 7 et 13. Ces trois entiers étant premiers entre eux, on en déduit que le nombre $U_n$ est divisible par le produit $2\times7\times13$.

 