Lemme :

L'unique fonction f vérifiant $f'=f$ et $f(0)=1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

On suppose donc l'existence de cette fonction f. On considère la fonction g dont l'image d'un nombre x est donnée par la formule :

$$g(x) = f(x)\cdot f(-x)$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivable. La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée g' :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)\cdot f(-x) + f(x)\cdot\big[-f'(-x)\big] \\ &= f'(x)\cdot f(-x) - f(x)\cdot f'(-x) \end{aligned}$$

De la propriété $f'=f$, on déduit :

$$= f(x)\cdot f(-x) - f(x)\cdot f(-x) = 0$$

La fonction g est donc constante. En remarquant que :

$$g(0) = f(0)\cdot f(-0) = 1\times 1 = 1$$

On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = 1$$

On vient de montrer que le produit $f(x)\cdot f(-x)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$: le facteur $f(x)$ ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$.

Proposition :

Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f'=f \text{ et } f(0)=1$$

Preuve :

- L'existence d'une telle fonction est admise.
- Pour montrer qu'il existe une unique fonction réalisant ces deux conditions, procédons au raisonnement par l'absurde suivant :

  "*Supposons qu'il existe deux fonctions réalisant f et g distinctes réalisant ces deux conditions.*"

  La fonction g vérifiant les conditions recherchées, le lemme permet d'affirmer que le quotient $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Considérons la fonction h définie par :

  $$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

  La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables. La formule de dérivation des quotients permet d'obtenir l'expression de la fonction h :

  $$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\big[g(x)\big]^2}$$

  Les propriétés de f et g permettent d'écrire :

  $$h'(x) = \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{\big[g(x)\big]^2} = \frac{0}{\big[g(x)\big]^2} = 0$$

  La dérivée de la fonction h étant nulle, on en déduit que la fonction h est constante et on a :

  $$h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

  On en déduit que pour tout nombre $x\in\mathbb{R}$, on a :

  $$h(x) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad\Longrightarrow\quad f(x) = g(x)$$

  On vient de montrer que ces deux fonctions coïncident sur $\mathbb{R}$: ces deux fonctions sont égales.