Proposition :

On considère un polynôme $a{\cdot}x^2{+}b{\cdot}x{+}c$ du second degré *($a{\neq}0$)*. L'ensemble des racines d'un polynôme dépend du signe de son discriminant :

- Si $\Delta{<}0$, le polynôme n'admet **aucune** racine.
  On note : $\mathcal{S}=\varnothing$
- Si $\Delta{=}0$, le polynôme admet **une** racine.
  Plus précisément : $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{b}{2{\cdot}a}\right\}$
- Si $\Delta{>}0$, le polynôme admet **deux** racines.
  Plus précisément : $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\,;\,\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right\}$

Preuve :

Le polynôme $a{\cdot}x^2{+}b{\cdot}x{+}c$ du second degré, avec $a{\neq}0$, admet pour forme canonique :

$$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=a\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}$$

Notons Δ le discriminant du polynôme : $\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c$

Notons x une racine de ce polynôme :

$$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=0$$
$$a\Big(x{+}\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2{-}4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}=0$$

On a $a{\neq}0$:

$$\Big(x{+}\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2{-}4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a^2}=0$$

On obtient :

$$\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2=\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a^2}$$

Avec la notation adoptée :

$$\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2=\frac{\Delta}{4{\cdot}a^2}\qquad(*)$$

- Lorsque $\boldsymbol{\Delta<0}$:
  On remarque que le membre de gauche, étant un carré, est positif ou nul alors que le membre de droite est du même signe que Δ : donc strictement négatif. Les deux membres n'étant pas de même signe, cette équation n'admet aucune solution.
  $\mathcal{S}=\varnothing$
- Lorsque $\boldsymbol{\Delta=0}$:
  On obtient $\Big(x{+}\dfrac{b}{2a}\Big)^2{=}0$: cette équation admet une unique racine $-\dfrac{b}{2a}$. On a : $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{b}{2{\cdot}a}\right\}$
- Lorsque $\boldsymbol{\Delta>0}$: reprenons l'expression $(*)$:

$$\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2=\frac{\Delta}{4{\cdot}a^2}$$
$$\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{\Delta}{4{\cdot}a^2}=0$$
$$\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{\big(\sqrt{\Delta}\big)^2}{\big(2{\cdot}a\big)^2}=0$$
$$\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\Big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)^2=0$$
$$\Big(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)=0$$
$$\Big(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)=0$$

Un produit étant nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=0\qquad\Big|\qquad x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=0$$

On obtient les 2 racines du polygône :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\quad;\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$$

On a : $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\,;\,\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right\}$

Proposition :

On considère un polynôme $a{\cdot}x^2{+}b{\cdot}x{+}c$ du second degré $(a{\neq}0)$. L'ensemble des racines d'un polynôme dépend du signe de son discriminant :

- Si $\Delta{<}0$, le polynôme n'admet **aucune** racine.
  On note : $\mathcal{S}=\varnothing$
- Si $\Delta{=}0$, le polynôme admet **une** racine.
  Plus précisément : $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{b}{2{\cdot}a}\right\}$
- Si $\Delta{>}0$, le polynôme admet **deux** racines.
  Plus précisément : $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\,;\,\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right\}$

Preuve :

Le polynôme $a{\cdot}x^2{+}b{\cdot}x{+}c$ du second degré, avec $a{\neq}0$, admet pour forme canonique :

$$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=a\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}$$

Notons Δ le discriminant du polynôme : $\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c$

Notons x une racine de ce polynôme :

$$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=0$$

$$a\Big(x{+}\frac{b}{2a}\Big)^2{-}\frac{b^2{-}4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}=0$$

On a $a{\neq}0$:

$$\Big(x{+}\frac{b}{2a}\Big)^2{-}\frac{b^2{-}4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a^2}=0$$

On obtient :

$$\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2=\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a^2}$$

Avec la notation adoptée :

$$\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2=\frac{\Delta}{4{\cdot}a^2}\qquad(*)$$

- Lorsque $\boldsymbol{\Delta<0}$:
  On remarque que le membre de gauche, étant un carré, est positif ou nul alors que le membre de droite est du même signe que Δ : donc strictement négatif. Les deux membres n'étant pas de même signe, cette équation n'admet aucune solution.
  $\mathcal{S}=\varnothing$
- Lorsque $\boldsymbol{\Delta=0}$:
  On obtient $\Big(x{+}\dfrac{b}{2a}\Big)^2{=}0$: cette équation admet une unique racine $-\dfrac{b}{2a}$. On a : $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{b}{2{\cdot}a}\right\}$
- Lorsque $\boldsymbol{\Delta>0}$: reprenons l'expression $(*)$:

$$\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2=\frac{\Delta}{4{\cdot}a^2}$$

$$\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{\Delta}{4{\cdot}a^2}=0$$

$$\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{\big(\sqrt{\Delta}\big)^2}{\big(2{\cdot}a\big)^2}=0$$

$$\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\Big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)^2=0$$

$$\Big(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)=0$$

$$\Big(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)=0$$

Un produit étant nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=0\qquad\Big|\qquad x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=0$$

On obtient les 2 racines du polygône :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\quad;\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$$

On a : $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\,;\,\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right\}$

